Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ – ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ – 30 април 2011 г.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
В	В	Г	А	Б	Б	А	В	А	Г
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
А	В	Б	А	А	В	Г	–1	В	Б
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Г	Б	Г	А	Г	Г	А	В	Г	В
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
Г	Б	Г	Б	В	84	15	40	31	4
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
9	Б	Г	10	184	А	Б	Г	В	3023

Задачите с отворен отговор са с номера 18, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 44, 45, 50 (общо 10).

1. Отг. В).

2. Отг. В).

3. Отг. Г). Ако x е решение, то дясната част на уравнението е неотрицателна, т.е. $7-5x\geq 0$ и тогава $|5x-7|=-5x+7$. Получаваме, че $-5x+7=7-5x$, което е изпълнено за всяко x. Заключаваме, че всяко x, за което $7-5x\geq 0$, т.е. $x\leq\dfrac{7}{5}$, е решение на задачата.

4. Отг. А).

$$8x^3+12x^2y-2xy^2-3y^3=4x^2(2x+3y)-y^2(2x+3y)=(2x-y)(2x+y)(2x+3y).$$

5. Отг. Б).

6. Отг. Б). Уравнението може да се запише във вида:

$$(x-3)\big[(x-4)(x-5)-(x-1)(x-2)\big]=0\Leftrightarrow 6(x-3)^2=0\text{, откъдето } x=3.$$

7. Отг. А). Уравнението е равносилно с $|2x-1|-3|2x-1|=-8$, а следователно и с $|2x-1|=4$. Решенията на последното уравнение са $x=-1{,}5$ и $x=2{,}5$.

8. Отг. В). Ако намисленото число е x, от условието следва, че $(12-x)^2 = 81$, т.е. $(12-x)^2 = 9^2$ и следоветолно $12-x=9$ или $12-x=-9$. Заключаваме, че намисленото число може да е $12-9=3$ или $12+9=21$.

9. Отг. А). Ако правоъгълникът има дължина a *см* и широчина b *см*, то $0{,}9a = 1{,}2b$. Оттук следва, че ако $a = 4x$, то $b = 3x$ и $14x = 84$, т.е. $x = 6$. Търсеното лице е 4.6.3.6= 432 *кв.см*.

10. Отг. Г). По първи признак $\Delta AMC \cong \Delta BNC$, откъдето следва, че $AC = BC$. Следователно равнобедреният ΔABC е равностранен, защото има ъгъл, равен на $60°$ (по условие $\sphericalangle ABC = 60°$). Тогава $\sphericalangle ACB = 60°$.

11. Отг. А). Търсеният ъгъл е равен на половината от $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$, т.е. на 70°.

12. Отг. В). Като използваме свойството на катет срещу ъгъл от 30°, намираме:

$$AC = 2CD = 2BD = 12\ cm.$$

13. Отг. Б). От свойството на медианата в правоъгълен триъгълник получаваме $MH = MC$ и $PH = PC$. Тогава:

$$\sphericalangle MHP = \sphericalangle MHC + \sphericalangle PHC = \sphericalangle MCH + \sphericalangle PCH = \sphericalangle ACB =$$
$$= 180^\circ - \left(\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC\right) = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

14. Отг. А). Имаме 168 = 3.7.8, 180 = 4.5.9 и 192 = 3.8.8, докато числото 164 = 4.41 не може да се представи като произведение от цифрите на едно трицифрено число, защото 41 е просто число.

15. Отг. А). Напомняме, че под ъгъл между две прави се разбира по-малкият от ъглите, които образуват правите. От теоремата за външен ъгъл следва, че ъгълът между правите, съдържащи две от ъглополовящите, е равен на полусбора на ъглите, които се разполовяват от ъглополовящите. Следователно сборът на тези ъгли е 2.38º = 76º, а третият ъгъл в дадения триъгълник е равен на 180º – 76º = 104º. Тъй като намереният ъгъл е тъп, той е най-големият.

16. Отг. В). Коефициентът пред четвъртата степен в нормалния вид на многочлена е $m^2 - 1$, а пред третата степен е m. Коефициентът пред четвъртата степен се анулира при $m = \pm 1$, като и при двете стойности коефициентът пред третата степен е ненулев.

17. Отг. Г). $\dfrac{3.5+5.11}{8} = \dfrac{70}{8} = \dfrac{35}{4} = 8\dfrac{3}{4} = 8{,}75\%$.

18. Отг. -1. Решенията на неравенството са $x \le -\dfrac{1}{10}$ и следователно търсеното най-голямо цяло число е -1.

19. Отг. В). Равенството е нарушено например при $a = 2$, $b = c = 1$.

20. Отг. Б). Числата от **В)** и **Г)** са отрицателни, това от **А)** е 10, а от **Б)** е 27.

21. Отг. Г). Нека $n^2 = a, \quad n-2=b$.
Тогава $P = a(a+1) - b(b+1) = a^2 - b^2 + a - b = (a-b)(a+b+1) =$
$= (n^2 - n + 2)(n^2 + n - 1)$.

22. Отг. Б). Равенството може да се запише във вида $11a + 11b = 132$, откъдето $a + b = 12$. Като използваме, че a и b са цифри, получаваме всички възможности: 39, 48, 57, 66, 75, 84 и 93, т.е. общо 7.

23. Отг. Г). Можем да запишем уравнението във вида $(2a-b)x = 3b - a - 2$. Ако в това уравнение изберем $a = \frac{1}{2}b$, ще получим уравнението $0x = \frac{5}{2}b - 2$. Според условието последното уравнение трябва да има решение. Това е изпълнено точно тогава, когато $b = \frac{4}{5}$. Лесно може да се провери, че при тази стойност на b даденото уравнение има решение за всяка стойност на параметъра a.

24. Отг. А). Четири от осемте ъгъла са равни помежду си и са остри, а останалите четири са техни съседни. Сред петте ъгъла има една двойка със сбор 180° и за останалите три ъгъла остава сбор от 171°, така че втора такава двойка няма и всеки от трите ъгъла е по $171^\circ : 3 = 57^\circ$. Търсеният ъгъл е равен на $180^\circ - 57^\circ = 123^\circ$.

25. Отг. Г). При тръгването от спирката тролеят вече изостава с 60 + 27 = 87 секунди спрямо разписанието. При скорост 40 *км/ч* той изминава 1 километър за 1/40 от часа, т.е. за 3600 : 40 = 90 секунди. За да навакса закъснението, тролеят трябва да измине 1 *км* за 90 – 87 = 3 секунди, което е скорост от 3600 : 3 = 1200 *км/ч*.

26. Отг. Г). Скоростта на катера по течението е $60 : 3\frac{3}{4} = \frac{60.4}{15} = 16$ *км/ч*. Следователно скоростта на катера срещу течението е $16 - 3 - 3 = 10$ *км/ч* и за 52 *км* са му нужни 5,2 часа, т.е. 5 часа и 12 минути.

27. Отг. А). Първото уравнение има решение $x = \frac{3a+4}{2}$, а второто – съответно $x = \frac{4-a}{3}$. Следователно търсим тези a, за които $\frac{3a+4}{2} + \frac{4-a}{3} > 1$. Оттук $a > -2$ и най-малкото цяло решение е $a = -1$.

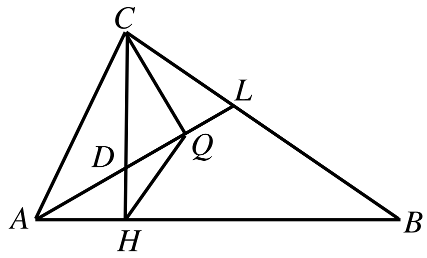
28. Отг. В). Ако търсената дължина е d *см*, имаме $\frac{d^2}{2} = 32$, откъдето $d = 8$.

29. Отг. Г). Лицето на ΔAMN е 1/8 от лицето на квадрата, а лицата на ΔBMC и ΔDNC са по 1/4 от лицето на квадрата. Тогава лицето на ΔCMN е 3/8 от лицето на квадрата.

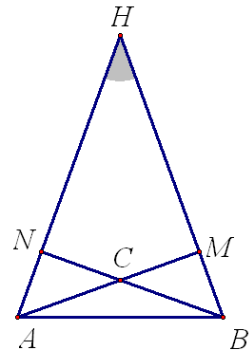
30. Отг. В). Нека AL пресича CH в точка D. Имаме $\Delta AHD \cong \Delta CQD$ по втори признак, откъдето $AD = CD$ и $DH = DQ$. Ако означим $\sphericalangle BAL = \sphericalangle CAL = \alpha$, то от ΔAHC намираме $\sphericalangle ACH = 90^\circ - 2\alpha$ и следователно:

$$\alpha = \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACH = 90^\circ - 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ .$$

От $DH = DQ$ и $\sphericalangle HDQ = 90^\circ + \alpha = 120^\circ$ получаваме $\sphericalangle DHQ = \sphericalangle DQH = 30^\circ$.



31. Отг. Г). Нека M и N са точки съответно от правите AC и BC така, че $BM \perp AC$ и $AN \perp BC$ (вж. чертежа вдясно). Означаваме с H пресчната точка на BM и AN. Тогава $\sphericalangle CAN = \sphericalangle BAN - \sphericalangle BAC = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$ и следователно $\sphericalangle AHB = 90^\circ - \sphericalangle CAN = 40^\circ$.



32. Отг. Б). $\sphericalangle ABC = 90^\circ - 16^\circ = 74^\circ$, така че $\sphericalangle ABL = \sphericalangle CBL = 37^\circ$ и $\sphericalangle LTC = \sphericalangle DTB = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$.

33. Отг. Г). Триъгълникът LHC е равностранен и следователно $CH = LH = \frac{l}{2}$. В правоъгълния триъгълник BDH имаме $\angle HBD = 30^\circ$, затова $DH = \frac{BH}{2} = \frac{l/2}{2} = \frac{l}{4}$. Следователно за височината получаваме $CH + DH = \frac{l}{2} + \frac{l}{4} = \frac{3l}{4}$.

34. Отг. Б). Не е възможно основата да е три пъти по-голяма от бедрата, тъй като това нарушава неравенството на триъгълника. Следователно, ако дължината на основата е x, то дължината на бедрото е $3x$. Получаваме уравнението $3x + 3x + x = 35$, откъдето $x = 5$ *см*. Страните на тригълника са 15 *см*, 15 *см*, 5 *см*.

35. Отг. В). Вътрешните ъгли на правилния петоъгълник са равни на 108° (сборът от вътрешните ъгли на всеки изпъкнал петоъгълник е $3.180^\circ = 540^\circ$, защото двата диагонала от един и същ връх разделят петоъгълника на три триъгълника, а $540^\circ : 5 = 108^\circ$). Тъй като ΔABC е равнобедрен, то $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$. По същия начин $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDC = 36^\circ$. Като използваме, че $\sphericalangle AMB$ е външен за ΔMBC, получаваме $\sphericalangle AMB = \sphericalangle DBC + \sphericalangle ACB = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$.

36. Отг. 84. Нека половината от търсеното разстояние е $x\,km$. Тогава в момента на срещата камионът от A е изминал $(x+3)\ km$, а този от B – съответно $(x-3)\ km$. Времената, през които са се движили камионите от A и B, са съответно $\frac{x+3}{50}h$ и $\frac{x-3}{60}h$. Тъй като камионът от A се е движил $15\min = \frac{15}{60}h$ повече, то получаваме уравнението $\frac{x+3}{50}-\frac{x-3}{60}=\frac{15}{60}$. Коренът на това уравнение е $x=42$. Следователно търсеното разстояние AB е $84km$.

37. Отг. 15. Ако дължината е била *x м*, то площта на лехата е била 2*x кв.м*. След увеличението тази площ е 1,6.2*x* = (2+1)(*x*+1), откъдето 0,2*x* = 3 и *x* = 15 *м*.

38. Отг. 40. Нека търсената хоризонтална част CD има дължина $x km$. Тогава другите две части имат дължини $AC=(x-10)km$ и $DB=(x+5)km$. Времената за изминаване на съответните участъци от пътя са съответно: $t_{AC}=\frac{x-10}{30}h$, $t_{CD}=\frac{x}{40}h$ и $t_{DB}=\frac{x+5}{50}h$. Тъй като $2h\,54\min=\frac{29}{10}h$, от условието получаваме уравнението $\frac{x-10}{30}+\frac{x}{40}+\frac{x+5}{50}=\frac{29}{10}$. Решението на това уравнение е $x=40$. Следователно търсеното разстояние е $40km$.

39. Отг. 31. От първото условие получаваме $a^2+a-b^2+b=0\Rightarrow(a+b)(a-b+1)=0$. Понеже a и b са положителни, получаваме $a-b+1=0$. Замествайки във второто условие, получаваме $b=16$ и $a=15$. Следователно $a+b=31$.

40. Отг. 4. Нека първият багер за 1 час изкопава x части от канала. Тогава за 1 час вторият багер ще изкопава $\frac{1}{6}-x$ части от канала и от второто изречение на условието получаваме уравнението $2x+18\left(\frac{1}{6}-x\right)=1$ с решение $x=\frac{1}{8}$. Следователно за 1 час първият багер изкопава $\frac{1}{8}$ от канала, а вторият изкопава $\frac{1}{24}$ от канала. За осемте часа, през които вторият багер е работил сам, той е изкопал $\frac{1}{3}$ от канала и двата багера трябва да изкопаят още $\frac{2}{3}$ от канала. Тъй като общата им производителност е $\frac{1}{6}$, те ще направят това за $\frac{2}{3}:\frac{1}{6}=4$ часа.

41. Отг. 9. Преди преливането в първия резервоар има $0,08\cdot 60=4,8\,л$ чиста киселина, а във втория резервоар има $0,17\cdot 40=6,8\,л$ чиста киселина. От първия резервоар към втория се преливат $0,08\cdot 8=0,64\,л$ чиста киселина и след първото преливане във втория резервоар ще има $6,8+0,64=7,44\,л$ чиста киселина. В първия резервоар ще останат 4,16*л* чиста киселина. Концентрацията на киселината във втория резервоар след първото преливане ще бъде равна на $\frac{7,44}{40+8}=\frac{7,44}{48}=15,5\%$. Тогава чистата киселина, която ще бъде прелята при второто преливане от втория резервоар в първия, ще бъде $\frac{15,5}{100}\cdot 8=1,24\,л$ и след второто преливане в първия резервоар ще има $4,16+1,24=5,4\,л$

чиста киселина. Оттук намираме, че концентрацията на киселината в първия резервоар след второто преливане ще бъде $\frac{5,4}{60}=9\%$.

42. Отг. Б). Числото $6n^2+6n+3$ се дели на 3 и е по-голямо от 3, значи винаги е съставно. За числото n^2+3n+2 имаме $n^2+3n+2=n^2+n+2n+2=(n+1)(n+2)$ и значи също винаги е съставно. За числото $6n^2+7n+2$ имаме $6n^2+7n+2=6n^2+3n+4n+2=(2n+1)(3n+2)$ и значи винаги е съставно. Числото n^2+2n+6 при $n=5$ е равно на 41, следователно е възможно да е просто.

43. Отг. Г). Нека отначало работникът за 1 *мин* извършва x части от работата. Тогава за a минути той ще извършва ax части от работата. След увеличаване на производителността си той ще извършва за 1 минута $x\left(1+\frac{p}{100}\right)$ части от работата и за b минути той ще извърши $bx\left(1+\frac{p}{100}\right)$ части от работата. Оттук получаваме равенството $ax=2bx\left(1+\frac{p}{100}\right)\Leftrightarrow\frac{a}{2b}=\frac{p+100}{100}\Leftrightarrow p=\frac{50}{b}(a-2b)$. Отговорите **А)** и **Б)** имат размерност в минути, така че явно са неподходящи. Отговор **В)** е неверен например при $a=4$, $b=1$, $p=100$, което е в съответствие с условието.

44. Отг. 10. Всеки от тримата е изял 11/3 сандвич, като Никола е дал на Ясен 1/3 сандвич, а Пешо е дал на Ясен 10/3 сандвич. Следователно Пешо е получил 10 бонбона, а Никола – 1 бонбон.

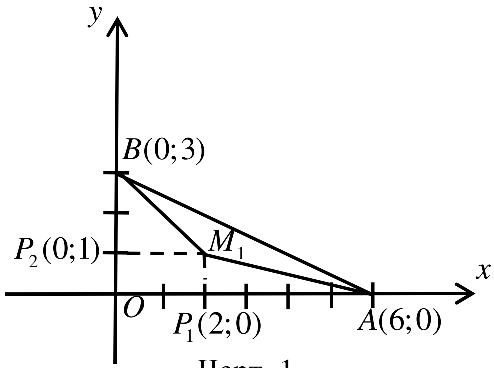
45. Отг. 184. С x да означаваме времето по план. Новата производителност ще бъде равна на $12+33\frac{1}{3}\%.12=12+\frac{100}{3.100}.12=16$ детайла. Така имаме

$$\begin{aligned}&24+32+16(x-9)+20=12x\\&56+16x-144+20=12x\\&16x-12x=144-56-20,\end{aligned}$$

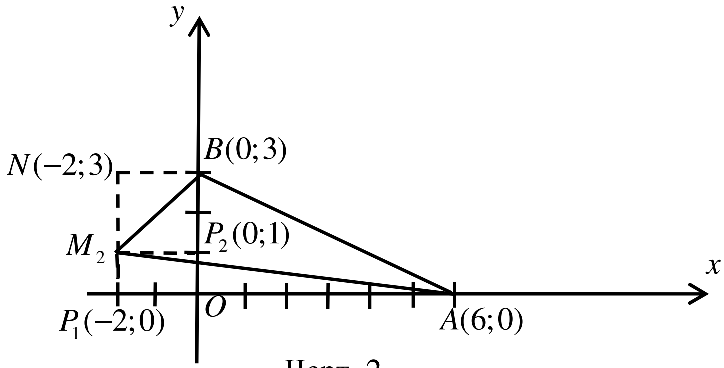
т.е. $4x=68$ и $x=17$. Произведените детайли са $12.17-20=204-20=184$ броя.

46. Отг. А). Нека S *км* е разстоянието от A до B, а скоростите на велосипедистите са съответно V_1 *км/ч* и V_2 *км/ч*. Тъй като от старта до първата среща двамата велосипедисти изминават общо S *км*, а общото разстояние, което изминават двамата между всеки две от следващите последователни срещи, е $2S$ *км*, то $V_1+V_2=5S$ *км/ч*. Ако x часа е времето от третата до четвъртата среща, то $(V_1+V_2)x=2S$, т.е. $5Sx=2S$, откъдето $x=\frac{2S}{5S}=\frac{2}{5}$ часа $=24$ минути.

47. Отг. Б). Нека $M(x;y)$ е точка с исканото свойство. Тогава $S_{AOM}=\frac{6|y|}{2}=3|y|$ и числото $3|y|$ е просто само при $y=\pm1$. Аналогично $S_{BOM}=\frac{3|x|}{2}$, което е просто само при $x = \pm 2$. Така за M има 4 възможности: $M_1(2;1)$, $M_2(-2;1)$, $M_3(-2;-1)$ и $M_4(2;-1)$.



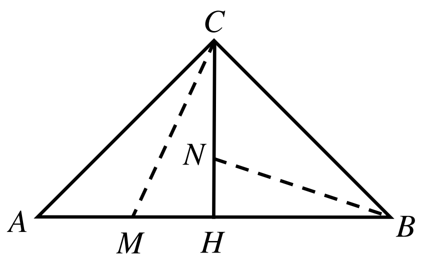
Черт. 1



Черт. 2

Във всички случаи лицето на ABM може да се получи със събиране или изваждане на лицата на AOB, AOM и BOM, които (в *кв.см*) са кратни на 3, така че за да бъде числото просто, то трябва да е равно на 3. Действително при $M_1(2;1)$ (черт. 1) имаме $S_{ABM_1} = S_{ABO} - S_{OAM_1} - S_{OBM_1} = 9 - 3 - 3 = 3$, което е просто число, така че точката $M_1(2;1)$ е решение на задачата. В останалите случаи числата са по-големи, понеже съответните триъгълници съдържат триъгълника от първия случай, и бидейки кратни на 3, не са прости (на черт. 2 е показан вторият случай; там $S_{ABM_2} = S_{AOB} + S_{BOM_2} - S_{AOM_2} = 9 + 3 - 3 = 9$ кв.см). И така, има единствена точка с исканото свойство.

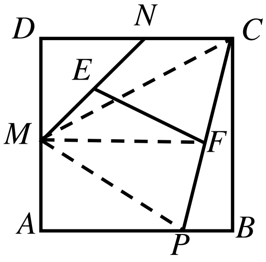
48. Отг. Г). Да означим ъглополовящата от върха C в триъгълника AHC с CM, а ъглополовящата от върха B в триъгълника BHC – съответно с BN. Тъй като $\sphericalangle ACH = 90^0 - \sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$, то $\sphericalangle MCH = \sphericalangle NBH$ и следователно $\Delta MHC \cong \Delta NHB$ по II признак за еднаквост. Оттук заключаваме, че $CH = BH$ като съответни елементи в еднакви триъгълници. Тогава правоъгълният триъгълник HBC е равнобедрен. Получаваме, че $\sphericalangle HBC = 45°$, а следователно и $\sphericalangle HAC = \sphericalangle ACH = 45°$. Тогава $AH = CH = BH$, т.е. $CH = \dfrac{1}{2} AB = 14\,см$ и $S_{ABC} = \dfrac{AB.CH}{2} = \dfrac{28.14}{2} = 196\,кв.\ см.$



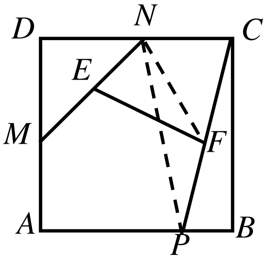
49. Отг. В). Тъй като $DM = DN = 2\,см$, то $S_{MND} = 2\,см^2$. От друга страна, MN е медиана в ΔMCD и следователно $S_{MCN} = S_{MND} = 2\,см^2$. Имаме $AP = 3\,см$ и $AM = 2\,см$, откъдето $S_{APM} = 3\,см^2$. Освен това $S_{PBC} = \dfrac{PB.BC}{2} = \dfrac{1.4}{2} = 2\,см^2$. Тогава:

$$S_{MPC} = S_{ABCD} - \left(S_{MND} + S_{MCN} + S_{APM} + S_{PBC}\right) = 16 - (2 + 2 + 3 + 2) = 16 - 9 = 7\,см^2.$$

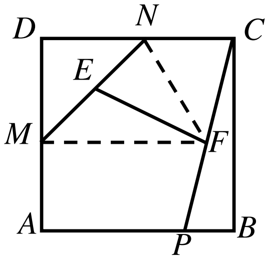
Тъй като MF е медиана в ΔPCM (вж. черт. 1), то $S_{MFC} = S_{MFP} = \dfrac{7}{2}\,см^2$.



Черт. 1



Черт. 2



Черт. 3

Точката P е на разстояние 4 *см* от страната NC на ΔNCP (вж. черт. 2) и следователно $S_{NCP}=\frac{2.4}{2}=4\ см^2$. Отсечката NF е медиана в ΔNCP, откъдето получаваме, че $S_{NFC}=\frac{1}{2}S_{NCP}=2\ см^2$. Тогава $S_{APFM}=S_{APM}+S_{MFP}=3+\frac{7}{2}=\frac{13}{2}\ см^2$ (черт. 1) и

$$S_{MFN}=S_{ABCD}-\left(S_{APFM}+S_{MND}+S_{NFC}+S_{PBC}\right)=16-\left(\frac{13}{2}+2+2+2\right)=16-\frac{25}{2}=\frac{7}{2}\ см^2.$$

Отсечката EF е медиана в ΔMFN (вж. черт. 3) и тогава $S_{MEF}=S_{NEF}=\frac{1}{2}S_{MFN}=\frac{7}{4}\ см^2$.

Така $S_{APFEM}=S_{APFM}+S_{MEF}=\frac{13}{2}+\frac{7}{4}=\frac{33}{4}\ см^2$ и $S_{EFCN}=S_{NEF}+S_{NFC}=\frac{7}{4}+2=\frac{15}{4}\ см^2$ и за търсеното отношение получаваме $\frac{S_{APFEM}}{S_{EFCN}}=\frac{\frac{33}{4}}{\frac{15}{4}}=\frac{33}{15}=\frac{11}{5}$.

50. Отг. 3023. Да разгледаме думата БОЛКА като една буква. Думите, съставени от буквите З, Ъ, Е, Р и БОЛКА, т.е. “болезнените”, са 5.4.3.2.1=120. Общият брой думи с 9 различни букви е 9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 54.56.120 = (55–1)(55+1)120 = 3024.120, така че “безболезнените” подредби са 3023.120 и търсеният отговор е 3023.

Задачитеса предложени от:

Веселин Ненков: 1, 3, 5, 10, 12, 18, 27, 28, 31, 32, 33, 36, 38 (13 задачи)
Диана Миланова: 2, 8, 29, 30, 45 (5 задачи)
Ивайло Кортезов: 4, 9, 14, 15, 24, 25, 37, 50 (8 задачи)
Светлозар Дойчев: 6, 21, 23, 40, 41, 42, 43 (7 задачи)
Ивайло Старибратов: 7, 11, 13, 16, 17, 26, 34 (7 задачи)
Ирина Шаркова: 19, 20, 22, 39, 44 (5 задачи)
Сава Гроздев: 35, 46, 47, 48, 49 (5 задачи)