Национален тест-състезание по математика за VII клас
Областен кръг, 20 март 2011 г.
Ключ за отговори

1 задача	А	**Б**	В	Г
2 задача	**А**	Б	В	Г
3 задача	А	Б	В	**Г**
4 задача	**А**	Б	В	Г
5 задача	А	Б	**В**	Г
6 задача	А	Б	В	**Г**
7 задача	А	Б	В	**Г**
8 задача	А	Б	В	**Г**
9 задача	А	Б	**В**	Г
10 задача	А	Б	**В**	Г

Бр. верни отговори
..........х 2 т.

11 задача	**А**	Б	В	Г
12 задача	А	**Б**	В	Г
13 задача	**А**	Б	В	Г
14 задача	А	Б	В	**Г**
15 задача	А	Б	**В**	Г
16 задача	**А**	Б	В	Г
17 задача	А	Б	В	**Г**
18 задача	А	**Б**	В	Г
19 задача	А	Б	В	**Г**
20 задача	А	Б	**В**	Г
21 задача	**А**	Б	В	Г
22 задача	А	Б	В	**Г**
23 задача	А	**Б**	В	Г
24 задача	**А**	Б	В	Г
25 задача	А	**Б**	В	Г

Бр. верни отговори
............х 3 т.

Задачите 26, 27 и 28 са с кратък отговор. Максималният брой точки, които носи всяка вярно решена от тях задача е 5.

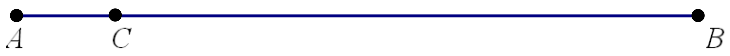
Подусловията а) и б) са взаимозависими и разбиването на точките по тях е следното:
Задача 26 - При верен отговор на б) задачата се оценява с 5 т. При грешен отговор на б) се гледа отговора на а) и ако само той е верен, задачата се оценява с 2 т.

Задача 27 - При верен отговор на б) задачата се оценява с 5 т. При грешен отговор на б) се гледа отговора на а) и ако само той е верен, задачата се оценява с 3 т.

Задача 28 - При верен отговор на б) задачата се оценява с 5 т. При грешен отговор на б) се гледа отговора на а) и ако само той е верен, задачата се оценява с 2 т

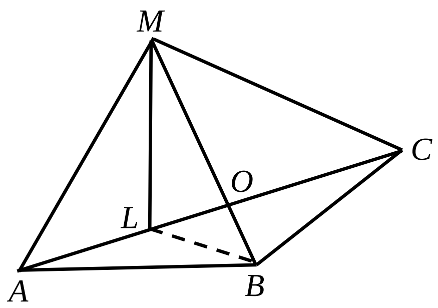
	ОТГОВОР	ТОЧКИ	
		по подусловия	по задачи
26 задача	а) 6	2	5
	б) 9		
27 задача	а) 4,5	3	5
	б) $x=y=\frac{1}{2}$ или $x=y=-\frac{1}{2}$		
28 задача	а) $1+2S$	2	5
	б) 10 303		
29 задача		10	
30 задача		10	
	Общ брой точки	35	

29. *Решение*:
Нека търсеното разстояние е $x\,km$. **(1 т.)** Тъй като разстоянието $AC=10km$ е изминато за $12\ \min=\frac{1}{5}h$, то пътят от A до C е изминат със скорост $50km/h$. С тази скорост търговецът би пристигнал в B за $\frac{x}{50}h$ **(1 т.)**, но за да е навреме, е трябвало да се придвижи за $\left(\frac{x}{50}-\frac{7}{60}\right)h$. **(1 т.)**



Увеличената с 20% скорост е равна на $50+50.\frac{20}{100}=60km/h$. **(1 т.)** Следователно останалото разстояние $CB=(x-10)km$ търговецът е изминал за $\frac{x-10}{60}h$. **(1 т.)** От условието следва, че $\frac{x}{50}-\frac{7}{60}=\frac{1}{5}+\frac{x-10}{60}+\frac{1}{12}$ **(3 т.)**, откъдето $x=70$. **(2 т.)** Следователно търсеното разстояние AB е $70km$.

30. *Решение:* Ясно е, че $\angle ACB=30°$ и $\angle MBC=70°$. **(1 т.)** Нека $AC\cap BM=O$ и ъглополовящата на $\angle AMB$ пресича AO в точката L. **(2 т.)** Тъй като правата ML е симетралата на отсечката AB, то ΔABL е равнобедрен с ъгли $\angle LAB=\angle LBA=20°$. **(1 т.)** От тук лесно намираме, че ΔBOL е равнобедрен **(1 т.)**, защото $\angle OBL=40°$ и $\angle BOL=100°$. Следователно $OB=OL$ и тогава $\Delta BOC\cong\Delta LOM$ по втори признак **(2 т.)**. От тази еднаквост следва равенството $OM=OC$ **(1 т.)** и понеже $\angle MOC=\angle BOL=100°$, то $\angle BMC=40°$. **(1 т.)** Това означава, че ъглите на ΔBMC са $70°, 40°$ и $70°$, т.е. $BM=CM\Rightarrow CM=AB$. **(1 т.)**



Отговори и решения

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10					
Б	А	Г	А	В	Г	Г	Г	В	В					
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
А	Б	А	Г	В	А	Г	Б	Г	В	А	Г	Б	А	Б

8. Отг. Г). Ако е изпълнено **Г)**, еднаквостта следва по първи признак. Останалите отговори не съответстват на признаци, защото поне една от страните е срещуположна на ъгъла.

9. Отг. В). $4\left(1-\frac{1}{2}x\right)=-10 \Leftrightarrow 4-2x=-10 \Leftrightarrow -2x=-14 \Leftrightarrow x=7$. Реципрочното на чилото 7 е числото $\frac{1}{7}$.

10. Отг. В). $9x^2-12xy+4y^2=\left(3x-2y\right)^2$.

11. Отг. А). Ако означим $a=3^{100}$ и $b=2^{100}$, даденият израз се записва във вида $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ и е равен на $a-b$.

12. Отг. Б). От условието следва, че $\gamma=120°$ и следователно пресечната точка на височините е извън триъгълника. Като използваме, че сборът от ъглите в един четириъгълник е равен на $360°$, за търсения ъгъл намираме $60°$.

13. Отг. А). Нека първоначално парцелът е с дължина a и широчина b. Новата широчина е $b-0,2b=0,8b$. Ако x е новата дължина, то от условието следва, че $x.0,8b=ab$, откъдето $x=\frac{a}{0,8}=\frac{5}{4}a$. Увеличението на дължината е с $\frac{5}{4}a-a=\frac{1}{4}a$, което в проценти е $\frac{\frac{1}{4}a}{a}.100=\frac{100}{4}=25\%$.

14. Отг. Г). От условието следва, че ΔAMC е равнобедрен ($AC=MC$), тъй като ъглополовящата от върха C е и височина. Заключаваме, че ъглополовящата е и медиана, а следователно правата CL минава през средата на отсечката AM. Понеже $CL \perp AM$ по условие, то правата CL е симетрала на отсечката AM. По този начин установяваме верността на **А)**. По-нататък следва, че $AL=ML$, откъдето $\Delta ALC \cong \Delta MLC$ по трети признак. Значи **Б)** също е вярно. Вярно е и **В)**, защото по условие M е средата на отсечката BC, откъдето $BC=2CM=2AC$. Равенството $LM=BM$ е невъзможно, защото в противен случай би следвало, че $AL=LM=MC=AC$, т.е. че четириъгълникът $ALMC$ е ромб и $AL \parallel CM$. Последното означава, че правите AB и BC не биха се пресичали в B.

15. Отг. В).

$$\frac{\left(3x-2y\right)^2+3\left|x-2\right|-2\left|y\right|}{\left(y-x\right)\left(x+y\right)}=\frac{\left(3.1-2.(-2)\right)^2+3\left|1-2\right|-2\left|-2\right|}{\left(-2-1\right)\left(1-2\right)}=\frac{49+3-4}{(-3)(-1)}=\frac{48}{3}=16.$$

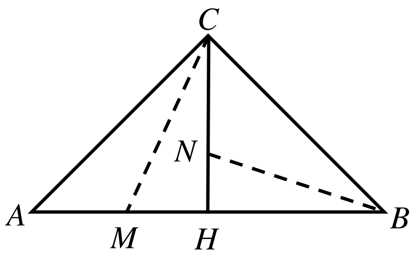
16. Отг. А). От успоредността $AB \parallel CD$ следва, че $\angle BAC = \angle ACD$. Тогава от теоремата за сбора на ъглите в един триъгълник, приложена за ΔABD, намираме:

$$\angle ADB = 180^\circ - \left(38^\circ + \angle ABD + \angle BAC\right) = 180^\circ - \left(38^\circ + \angle ABD + \angle ACD\right) =$$
$$180^\circ - \left(38^\circ + 73^\circ 45'\right) = 180^\circ - 111^\circ 45' = 68^\circ 15'.$$

17. Отг. Г). Първото уравнение има решение $x = 5a$, а решението на второто е $x = a + 3$. От условието $5a = a + 3$ намираме $a = \frac{3}{4}$.

18. Отг. Б). От условието следва, че $CP = AB = CA$, т.е. ΔAPC е равнобедрен с ъгъл между бедрата $\angle ACP = \angle ACB + \angle BCP = 60^\circ + 10^\circ = 70^\circ$. Оттук намираме, че $\angle APC = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 70^\circ\right) = 55^\circ$.

19. Отг. Г). Да означим ъглополовящата от върха C в триъгълника AHC с CM ($M \in AH$), а ъглополовящата от върха B в триъгълника BHC – съответно с BN ($N \in CH$). Тъй като $\angle ACH = 90^\circ - \angle BAC = \angle ABC$, то $\angle MCH = \angle NBH$ и следователно $\Delta MHC \cong \Delta NHB$ по II признак за еднаквост. Оттук заключаваме, че $CH = BH$ като съответни елементи в еднакви триъгълници. Тогава правоъгълният триъгълник HBC и равнобедрен. Получаваме, че $\angle HBC = 45^\circ$, а следователно и $\angle HAC = \angle ACH = 45^\circ$. Тогава $AH = CH = BH$, т.е. $CH = \frac{1}{2}AB = 14\,см$ и $S_{ABC} = \frac{AB.CH}{2} = \frac{28.14}{2} = 196\,кв.\ см.$



20. Отг. В). Уравнението е еквивалентно с $(2-a)x = 6a$ и следователно има корен точно когато $a \neq 2$.

21. Отг. А). Понеже $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, сборът на числата е $168:7 = 24$ и средното им аритметично е $24:2 = 12$ (за сведение, самите числа са 15,5 и 8,5).

22. Отг. Г). За НОК$(8;12) = 24$ часа първата тръба може да напълни 3 такива басейна, втората – 2 басейна, а трите заедно биха напълнили $24:(2+2) = 6$ такива басейна. Тъй като $6 - (3+2) = 1$, третата тръба би напълнила басейна сама за 24 часа. Следователно $h = 24$.

23. Отг. Б). Уравнението е еквивалентно на $4\left|5+2x\right| = 48$, т.е. на $\left|5+2x\right| = 12$, откъдето намираме корените му $x_1 = -8{,}5$ и $x_2 = 3{,}5$. Сумата на целите числа между двата корена е равна на $-8-7-6-5-4-3-2-1+0+1+2+3 = -30$.

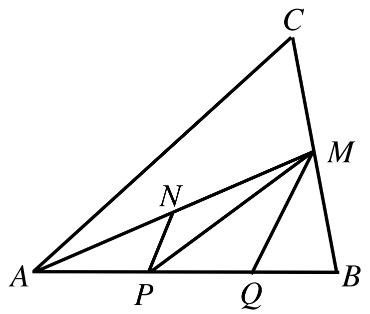
24. Отг. А). Ако момчетата са x, то момичетата са $104 - x$. От условието имаме, че $3x + 104 - x = 3\left(104 - x\right) + x - 48$, откъдето $x = 40$.

---

25. Отг. Б). От условието, че симетралата на AM пресича AB в средата й, следва, че медианата от върха M в $\triangle ABM$ е равна на $\frac{1}{2}AB$, откъдето заключаваме, че $\triangle ABM$ е правоъгълен ($\angle AMB = 90°$). Следователно $\angle ACB < \angle AMB = 90°$, защото точката M е вътрешна. Тъй като страната AB е най-голямата, то триъгълникът е остроъгълен.

26. Отг. а) 6; б) 9. При верен отговор на б) задачата се оценява с **5 т.** При грешен отговор на б) се гледа а) и ако отговорът е верен, задачата се оценява с **2 т.**

Решение: Нека $S_{ABC} = S$.



а) Тъй като AM е медиана в ΔABC, то $S_{ABM} = \frac{S}{2}$. От друга страна триъгълниците APM и ABM имат една и съща височина от върха M, като основата AP в първия триъгълник е 3 пъти по-малка от основата AB във втория. Оттук заключаваме, че $S_{APM} = \frac{1}{3}S_{ABM} = \frac{1}{3}\cdot\frac{S}{2} = \frac{S}{6} = 6$.

б) Триъгълниците PBM и ABM имат една и съща височина от върха M, като основата PB в първия триъгълник е $\frac{2}{3}$ от основата AB във втория. Оттук заключаваме, че $S_{PBM} = \frac{2}{3}S_{ABM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{S}{2} = \frac{S}{3}$. Освен това PN е медиана в ΔAPM, откъдето $S_{PMN} = \frac{1}{2}S_{APM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{S}{6} = \frac{S}{12}$. Аналогично, MQ е медиана в ΔPBM и $S_{PQM} = \frac{1}{2}S_{PBM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{S}{3} = \frac{S}{6}$. Тогава $S_{PQMN} = S_{PMN} + S_{PQM} = \frac{S}{12} + \frac{S}{6} = \frac{S}{4} = 9$.

27. Отг. а) 4,5; б) $x = y = \frac{1}{2}$ или $x = y = -\frac{1}{2}$. При верен отговор на б) задачата се оценява с **5 т.** При грешен отговор на б) се гледа а) и ако отговорът е верен, задачата се оценява с **3 т.**

Решение: а) $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 8x^2y^2 - 2xy = 2xy(4xy-1)$. Тъй като $(x-y)^2 \ge 0$ и $xy > 0$, заключаваме, че $4xy \ge 1$. Следователно $xy \ge \frac{1}{4}$ и $x^2y^2 \ge \frac{1}{16}$. Тогава

$$A = 9x^2 + 9y^2 = 9(x^2 + y^2) = 9.8x^2y^2 \ge 9.8\cdot\frac{1}{16} = 4,5.$$

б) Равенството в $(x-y)^2 \ge 0$ се достига при $x = y$. Следователно $A = 4,5$ при $x = y = \pm\frac{1}{2}$.

28. Отг. а) $1+2S$; б) 10 303. При верен отговор на б) задачата се оценява с **5 т.** При грешен отговор на б) се гледа а) и ако отговорът е верен, задачата се оценява с **2 т.**

Решение: а) Нека $a = 101\,см$. Тогава сумата от лицата на първите два квадрата е равна на $a^2 + (a+1)^2 = \left(a-(a+1)\right)^2 + 2a(a+1) = 1 + 2a(a+1) = 1 + 2S$.

б) Като използваме идеята от а), за лицето на четвъртия квадрат намираме:

$$101^2 + 102^2 + 10\,302^2 = 1 + 2.101.102 + (101.102)^2 = (1 + 101.102)^2 = 10\,303^2.$$

Следователно дължината на страната на четвъртия квадрат е 10 303 *см*.

29. *Решение*: Нека търсеното разстояние е $x\,km$. **(1 т.)** Тъй като разстоянието $AC = 10\,km$ е изминато за $12\ \min = \frac{1}{5}\,h$, то пътят от A до C е изминат със скорост $50\,km/h$. С тази скорост търговецът би пристигнал в B за $\frac{x}{50}h$ **(1 т.)**, но за да е навреме, е трябвало да се придвижи за $\left(\frac{x}{50} - \frac{7}{60}\right)h$. **(1 т.)** Увеличената с 20% скорост е равна на $50 + 50.\frac{20}{100} = 60\,km/h$. **(1 т.)** Следователно оставалото разстояние

$CB = (x-10)\,km$ търговецът е изминал за $\frac{x-10}{60}h$. **(1 т.)** От условието следва, че $\frac{x}{50} - \frac{7}{60} = \frac{1}{5} + \frac{x-10}{60} + \frac{1}{12}$ **(3 т.)**, откъдето $x = 70$. **(2 т.)** Следователно търсеното разстояние AB е $70\,km$.

30. *Решение:* Ясно е, че $\angle ACB = 30°$ и $\angle MBC = 70°$. **(1 т.)** Нека $AC \cap BM = O$ и ъглополовящата на $\angle AMB$ пресича AO в точката L. **(2 т.)** Тъй като правата ML е симетралата на отсечката AB, то ΔABL е равнобедрен с ъгли $\angle LAB = \angle LBA = 20°$. **(1 т.)** Оттук лесно намираме, че ΔBOL е равнобедрен **(1 т.)**, защото $\angle OBL = 40°$ и $\angle BOL = 100°$. Следователно $OB = OL$ и тогава $\Delta BOC \cong \Delta LOM$ по втори признак **(2 т.)**. От тази еднаквост следва равенството $OM = OC$ **(1 т.)** и понеже $\angle MOC = \angle BOL = 100°$, то $\angle BMC = 40°$. **(1 т.)** Това означава, че ъглите на ΔBMC са $70°, 40°$ и $70°$, т.е. $BM = CM \Rightarrow CM = AB$. **(1 т.)**