

| | | | | | | | | | |
|-----|-------|-----|----|-----|---|-----|-----|-----|---|
| 1. | В | 11. | В | 21. | Б | 31. | А | 41. | Б |
| 2. | В | 12. | 25 | 22. | Г | 32. | 1 | 42. | Б |
| 3. | В | 13. | А | 23. | Б | 33. | Г | 43. | 3 |
| 4. | Г | 14. | В | 24. | В | 34. | Б | 44. | Г |
| 5. | А | 15. | Б | 25. | Г | 35. | Б | 45. | В |
| 6. | 18,75 | 16. | 15 | 26. | А | 36. | А | 46. | В |
| 7. | Г | 17. | Б | 27. | 0 | 37. | Г | 47. | А |
| 8. | Г | 18. | 35 | 28. | А | 38. | 45 | 48. | Г |
| 9. | Б | 19. | В | 29. | В | 39. | А | 49. | А |
| 10. | Б | 20. | Г | 30. | А | 40. | 150 | 50. | 5 |

**Решения на задачите от областния кръг на Националното състезание – тест
22 март 2009 г.**

1. Отг. В). Числото 100^{2009} има $2 \cdot 2009 = 4018$ нули. Като прибавим и единицата, получаваме общо 4019 цифри.

2. Отг. В). $(x + y)^2 = 49 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 49 \Leftrightarrow x^2 + 2 \cdot 10 + y^2 = 49 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 29$.

3. Отг. В). Последователните положения на бълхата са: $(0;0) \rightarrow (2;0) \rightarrow (2;3) \rightarrow (1;3)$.

4. Отг. Г). Дадената височина е към страната с дължина 7 см, защото в противен случай катет с дължина 9 см би трябвало да участва в правоъгълен триъгълник с хипотенуза 7 см, което не е възможно. Следователно лицето на триъгълника е равно на $S = \frac{7 \cdot 9}{2} = 31,5$ кв.см.

5. Отг. А). $A = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ и $B = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$. Следователно $A = B$.

6. Отг. 18,75%. Лицето на триъгълника, образуван от два последователни върха на осмобъгълника и центъра O , е $\frac{1}{8}$ от лицето на осмобъгълника. Отсечката OM е медиана в един такъв триъгълник и следователно разделя лицето му на две равни части. Тогава лицето на зашрихованата част е $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ от лицето на осмобъгълника, което е 18,75%.

7. Отг. Г). Тъй като $(x+2)(x^2-2x+4)-x^3+x-10=(x^3+8)-x^3+x-10=x-2$, стойността на израза е $2009-2=2007$.

8. Отг. Г). Втората бригада е асфалтирала $3,08 \cdot 1,5 = 4,62$ км и дължината на магистралата е $3,08 + 4,62 + 2,5 = 10,2$ км.

9. Отг. Б). При разкриване на абсолютната стойност използваме, че $2009^{12} > 2009^{10}$. Тогава $-2009^{12} + |2009^{10} - 2009^{12}| + 2009^{10} = -2009^{12} + 2009^{12} - 2009^{10} + 2009^{10} = 0$.

10. Отг. Б). Времето в София е с 2 часа напред спрямо Лондон, а в Лондон то е с 5 часа напред спрямо Ню Йорк. Затова времето в София е със 7 часа напред спрямо Ню Йорк. Получаваме $14 - 7 = 7$ ч.

11. Отг. В). От условието следва, че $\angle EBC = \angle BEC = 45^\circ$, т.е. $\triangle EBC$ е равнобедрен и $BC = EC = 2$ см. От друга страна $BC + CD = 32 : 2 = 16$ см и оттук намираме, че $DE = 16 - (2 + 2) = 12$ см. Тогава $CD = 14$ см и търсеното лице е $14 \cdot 2 = 28$ кв. см.

12. Отг. 25. Нечетните числа от 1 до 2008 са $2008 : 2 = 1004$ на брой, които групираме по двойки: 1 и 2007, 3 и 2005, 5 и 2003, и т.н. Двойките са общо $1004 : 2 = 502$. Тъй като $1 + 2007 = 3 + 2005 = \dots = 2008$, то търсената сума е $2008 \cdot 502 + 2009 = 1\,010\,025$. Двучифреното число, на което завършва сумата, е 25.

13. Отг. А). Възможни са два случая: $3 - 2x = 5$ или $3 - 2x = -5$. В първия случай $3 - 2x = 5 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$, а във втория $3 - 2x = -5 \Leftrightarrow -2x = -8 \Leftrightarrow x = 4$. Отговорът е 4, защото $4 > -1$.

14. Отг. В). От правоъгълните триъгълници A_1AB и B_1BA намираме съответно $\angle ABA_1 = 70^\circ$ и $\angle BAB_1 = 60^\circ$. Тогава

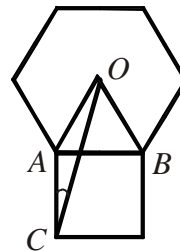
$$\angle ACB = 180^\circ - (\angle ABA_1 + \angle BAB_1) = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ.$$

15. Отг. Б). За да се дели числото на 2, трябва да се изтрие последната цифра 5. Сборът от цифрите на полученото число е $1 + 2 + 7 + 9 + 1 + 2 + 3 + 4 = 29$ и от признака за делимост на 3 заключаваме, че е достатъчно да се изтрие една от двойките в числото 12791234. По-голямото от двете така получени числа е 1791234.

16. Отг. 15° . $\triangle ABO$ е равностранен и следователно $\angle BAO = 60^\circ$. $\triangle CAO$ е равнобедрен и

$$\angle CAO = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ.$$

Оттук $\angle ACO = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$.



17. Отг. Б). Данните, съобщени от А и В, нямат общи части. Оттук следва, че нито един от тях не е познал точната дата. Същото важи и за данните, съобщени от В и Г. Заключаваме, че Б е познал точната дата. Чрез проверка в условието се установява, че това наистина е така.

18. Отг. 35. Търсеното число не може да е едноцифрено, защото в противен случай би се оказало, че 525 е квадрат на едноцифрено число. Това очевидно не е така. Ясно е, че числото не може да е с повече от 3 цифри. Тъй като $525 = 3.5^2 \cdot 7$, единствените двуцифрени и трицифрени делители на 525, които са по-малки от 525, са: 15, 21, 25, 35, 75, 105 и 175. Чрез непосредствена проверка установяваме, че само числото 35 изпълнява условието на задачата.

19. Отг. В). Тъй като $4 \cdot 8 = 32$ и $35 - 32 = 3$, числото трябва да се записва с точно 3 девятки и 1 осмица. Възможните числа са 9998, 9989, 9899 и 8999, т.е. общо 4 на брой.

20. Отг. Г). От $a = b + 5$ следва, че $a - b = 5 > 0$, т.е. винаги $a > b$. Заключаваме, че А) не е вярно. От $a + b = c$ следва, че $c - b = a$. Ако $a < 0$, то $c < b$ и В) е нарушено. Ако $a > 0$, то $c > b$ и сега Б) не е вярно. Следователно вярното е Г).

21. Отг. Б). Нека x е търсената концентрация (в проценти). В $3\frac{1}{3}$ литра 8% разтвор

има $\frac{8}{100} \cdot \frac{10}{3} = \frac{8}{3.10}$ литра чиста киселина. В 10 литра с концентрация $x\%$ има

$\frac{x}{100} \cdot 10 = \frac{x}{10}$ литра чиста киселина. Новополученият разтвор е $\frac{10}{3} + 10 = \frac{40}{3}$ литра с

концентрация 5% и чистата киселина в него е $\frac{5}{100} \cdot \frac{40}{3} = \frac{20}{3.10}$ литра. Оттук получаваме

уравнението $\frac{8}{3.10} + \frac{x}{10} = \frac{20}{3.10}$, което е еквивалентно с $8 + 3x = 20$ и следователно

$3x = 12$, т.е. $x = 4\%$.

22. Отг. Г). От петте върха поне три са от един цвят. От трите едноцветни върха поне два са съседни върхове на петогоълника. Тези два върха заедно с кой да е друг връх на петогоълника образуват равнобедрен триъгълник. Възможни са 3 случая за разположение на третия връх с цвета на двата съседни върха. В два от тях бедрата на равнобедрения триъгълник са страни на петогоълника, а в третия случай те са диагонали. Тук използваме, че кои да е два диагонала на петогоълника са равни, защото могат да се разглеждат като съответни елементи в еднакви триъгълници.

23. Отг. Б). Нека броят на числата в първата група е x . Тогава сборът им е $18x$. Броят на числата във втората група е $2x$ и сборът им е $24.2x = 48x$. Средноаритметичното на всички числа е $\frac{48x + 18x}{3x} = \frac{66x}{3x} = 22$.

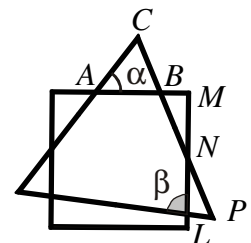
24. Отг. В). Изразите в А) и Г) имат отрицателни стойности. От друга страна $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$ и $0,2009^{-1} = \frac{10000}{2009}$, което е по-голямо от 4, защото $\frac{10000}{2500} = 4$ и $2009 < 2500$ (от две дроби с еднакви числители дробта с по-малък знаменател има по-голяма стойност).

25. Отг. Г). Общият брой вкарани голове е $1 + 3 = 4$, което е четно число. Това означава, че бройките голове, вкарани от всеки от двата отбора, са с еднаква четност. Заклучаваме, че ситуацията в Г) е невъзможна, защото разлика 1 се получава единствено когато двете бройки са с различна четност. В допълнение към решението ще отбележим, че ситуацията в А) се реализира при резултат 2:2, ситуацията в Б) се реализира при резултат 3:1 в полза на "Атлет", а ситуацията във В) се реализира при резултат 3:1 в полза на "Борец".

26. Отг. А). Тъй като $\angle ACB = 60^\circ$, то $\angle ABC = 180^\circ - (\alpha + 60^\circ) = 50^\circ$.

От друга страна $\angle NBM = \angle ABC = 50^\circ$ (връхни ъгли) и от правоъгълния $\triangle BNM$ намираме $\angle BNM = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

Следователно $\angle LNP = \angle BNM = 40^\circ$ (връхни ъгли). Най-накрая с помощта на теоремата за външен ъгъл в триъгълника получаваме, че $\beta = \angle LNP + 60^\circ = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$.



27. Отг. 0. Последователно получаваме $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = (x^2 + y^2 + xy) + xy = xy$, защото от условието следва, че $x^2 + y^2 + xy = 0$. Тъй като $(x + y)^2 \geq 0$, то с помощта на полученото равенство заключаваме, че $xy \geq 0$. От друга страна $x^2 + y^2 = -xy$, откъдето $xy \leq 0$. Получените неравенства за xy са възможни едновременно само в случая $xy = 0$.

Но тогава от условието следва, че $x^2 + y^2 = 0$, което е възможно само ако $x = y = 0$. Следователно $2x + 3y = 0$.

28. Отг. А). Нека t е времето в часове на пътуване на колата до момента на изпреварването. Тогава $t+2$ е времето на велосипедиста до момента на изпреварването. Изравняваме пътищата: $20(t+2) = 80t$ и намираме $t = \frac{2}{3}$ ч, което е равно на 40 минути. Следователно $11\text{ч} + 40\text{мин} = 11\text{ч} 40\text{мин}$.

29. Отг. В). Броят на всички кубчета е $100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$, а броят на тези, които участват в кулата, е $1\,000\,000 : 4 = 250\,000$. Тогава височината на кулата е равна на:

$$250\,000 \text{ см} = 2500 \text{ м} = 2,5 \text{ км}.$$

30. Отг. А). За сбора на ъглите в $\triangle AXB$ имаме:

$$\angle XAB + \angle XBA + \angle AXB = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ABC}{2} + \left(\frac{\angle ACB}{2} + \frac{\angle ACB}{2} + 45^\circ \right) = 180^\circ.$$

Тъй като $\frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle ACB}{2} = 90^\circ$, то $\frac{\angle ACB}{2} + 45^\circ = 90^\circ$, откъдето $\angle ACB = 90^\circ$.

31. Отг. А).

$$\begin{aligned} 3\frac{7}{11} \cdot 4\frac{4}{11} + 4\frac{6}{11} \cdot 5\frac{5}{11} + 6\frac{4}{11} \cdot 7\frac{7}{11} &= \left(4 - \frac{4}{11}\right) \left(4 + \frac{4}{11}\right) + \left(5 - \frac{5}{11}\right) \left(5 + \frac{5}{11}\right) + \left(7 - \frac{7}{11}\right) \left(7 + \frac{7}{11}\right) = \\ &= 16 - \frac{16}{121} + 25 - \frac{25}{121} + 49 - \frac{49}{121} = 90 - \frac{90}{121} = 89\frac{31}{121}. \end{aligned}$$

32. Отг. 1. Първото число $n^3 + 4n + 2$ е просто при $n = 1$ (стойността на израза е 7). Второто число $n^3 + 4n + 3$ е просто при $n = 2$ (стойността на израза е 19). Третото число $n^3 + 4n + 4$ е просто при $n = 3$ (стойността на израза е 43). Числото $n^3 + 4n + 5$ е съставно за всяко n , защото $n^3 + 4n + 5 = (n+1)(n^2 - n + 5)$.

33. Отг. Г). Твърдение Г) е винаги вярно, защото в противен случай ще бъде нарушено условието на задачата (когато Георги пее, Иван винаги си запушва ушите).

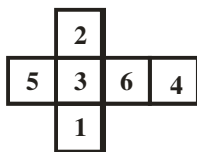
34. Отг. Б). До първия мъж трябва да са съпругите на другите двама и те могат да седнат по два различни начина. Когато тези две съпруги седнат, за останалите (двамата мъже и едната жена) има една единствена възможност.

35. Отг. Б). Общо 3 триъгълника: $\triangle ABM$, $\triangle ABN$ и $\triangle ABQ$. За първия от тях $AB = BM$ като хипотенузи в еднакви правоъгълни триъгълници с катети 2 и 4. За втория от тях $AN = BN$ като хипотенузи в еднакви правоъгълни триъгълници с катети 1 и 3. За третия триъгълник $AB = AQ$ като хипотенузи в еднакви правоъгълни триъгълници с катети 2 и 4.

36. Отг. А). Нека планираната дневна норма на шофьора е x курса. Тогава месечният му план е $20x$ курса. През м. февруари шофьорът е извършвал по $(x+3)$ курса на ден в продължение на 18 дни и е направил общо $18(x+3)$ курса. Тогава $18(x+3) = 20x + 24$, откъдето $x = 15$. Получаваме, че месечният план е $15 \cdot 20 = 300$ курса, който е преизпълнен с $\frac{24}{300} \cdot 100 = 8\%$. Следователно твърдение А) не е вярно. Твърдение Б) е вярно, защото $\frac{3}{15} \cdot 100 = 20\%$. Вярно е и твърдение В), защото $300 + 24 = 324$ курса.

Най-накрая е вярно и твърдение Г), защото за планираната дневна норма получихме 15 курса.

37. Отг. Г). Стените на зарчето са квадрати и следователно числото върху всяка стена участва като събираемо в четири сбора, които се съпоставят на четирите върха на квадрата. Тъй като $1+2+3+4+5+6=21$, то сборът на числата, които се съпоставят на осемте върха на зарчето, е $21 \cdot 4 = 84$. Ако най-малкото съпоставено число е поне 11, то сборът на осемте съпоставени числа е поне $11 \cdot 8 = 88$. Но $88 > 84$ и следователно това е невъзможно. Да разгледаме случая, когато най-малкото съпоставено число е 10. Числото 10 може да се представи точно по 3 начина като сбор на 3 числа измежду 1, 2, 3, 4, 5 и 6: $1+3+6=10$, $1+4+5=10$ и $2+3+5=10$. Това означава, че най-много за 3 върха на зарчето числата, които им се съпоставят, са равни на 10. За останалите 5 върха числата са равни поне на 11. Но $3 \cdot 10 + 5 \cdot 11 = 85 > 84$ и следователно този случай е също невъзможен. Заклучаваме, че възможно най-голямата стойност на най-малкото число, което се съпоставя на връх, е по-малка от 10. Показаният пример е реализация за 9.



38. Отг. 45. По условие 16 ученици са взели най-малко по два бонбона. Това означава, че в тази бройка са учениците, взели точно по два бонбона, както и учениците, взели точно по три бонбона. Заклучаваме, че взелите точно по два бонбона са $16 - 3 = 13$ на брой. По условие 26 ученици са взели най-малко по един бонбон. Това означава, че в тази бройка са учениците, взели точно по един бонбон, учениците, взели точно по два бонбона, както и учениците, взели точно по три бонбона. Заклучаваме, че взелите точно по един бонбон са $26 - 16 = 10$ на брой. Следователно общият брой на консумираните бонбони е $3 \cdot 3 + 13 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 45$.

39. Отг. А). Тъй като $\triangle ABC$ е равнобедрен, ъглополовящата CP лежи на симетралата на страната AB . Следователно точките X и O лежат на правата CP . От $OA = OC$ следва, че $\triangle AOC$ е равнобедрен и $\angle OAC = \angle ACO = \frac{1}{2} \angle ACB = 54^\circ$. В равнобедрения

$\triangle ABC$ имаме $\angle BAC = \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$. Тогава $\angle XAC = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 36^\circ = 18^\circ$.

Получаваме, че $\angle OAX = \angle OAC - \angle XAC = 54^\circ - 18^\circ = 36^\circ$.

40. Отг. 150. Даденото равенство записваме във вида $m(3m^2 - 2n) = 7$. Оттук заклучаваме, че m е делител на 7. Следователно за m са възможни следните случаи: $m = 1$, $m = 7$, $m = -1$ и $m = -7$. Ако $m = 1$, то $n = -2$. Ако $m = 7$, то $n = 73$. Ако $m = -1$, то $n = 5$. Ако $m = -7$, то $n = 74$. Сборът от възможните стойности на n е $-2 + 73 + 5 + 74 = 150$.

41. Отг. Б). Числото 2009 изпълнява условието на задачата и сборът от цифрите му е равен на 11.

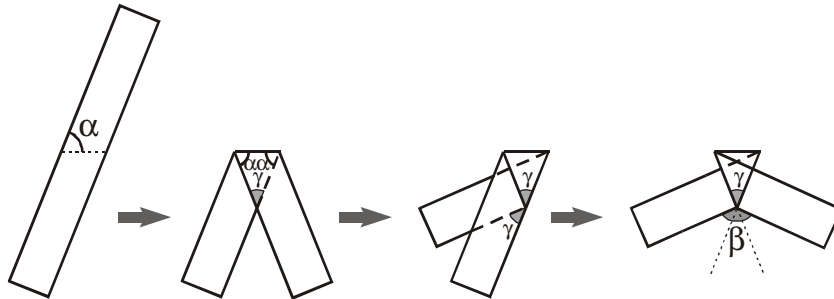
42. Отг. Б). Борис и Владо твърдят еднакви неща. От условието следва, че те или казват истината, или лъжат. Същото важи за Асен и Георги – те или казват истината, или лъжат. Ако Асен и Георги лъжат, то тогава всеки от тях е счупил стъклото. Но това противоречи на условието, че един от четиримата е направил белята. Следователно Асен и Георги казват истината. Заклучаваме, че стъклото е счупено от Борис или от Владо, като и двамата лъжат. Това е изпълнено само в случай, че Борис е направил белята, което е и отговорът на задачата.

43. Отг. 3. Квадратите на нечетните числа завършват на 1, 5 или 9. Следователно четвъртите степени на нечетните числа завършват само на 1 или 5. Тъй като никое от числата A и B не се дели на 5, заключаваме, че A^4 и B^4 завършват на 1. Следователно последната цифра на числото $2A^4 + B^4$ е равна на $2 \cdot 1 + 1 = 3$.

44. Отг. Г). Тъй като $\triangle ABM$ е равнобедрен ($AB = AM = \frac{1}{2}AC$), то $\angle ABM = 45^\circ$.

Оттук следва, че $\angle ABC > 45^\circ$ и заключаваме, че **А)** е вярно. Освен това AL е ъглополовяща, откъдето $\angle BAL = 45^\circ$. Следователно $\angle ABM + \angle BAL = 90^\circ$, което означава, че $AL \perp BM$, т.е. **Б)** също е вярно. Вярно е и **В)**, защото от теоремата за външен ъгъл в триъгълника имаме, че $\angle BMC = \angle BAM + \angle ABM = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$. Не е вярно **Г)**. В противен случай ще излезе, че $AB = \frac{1}{2}BC$ (катет срещу ъгъл от 30°) и тъй като $AB = \frac{1}{2}AC$, бихме заключили, че $AC = BC$, което не е възможно.

45. Отг. В). От чертежа се вижда, че $\beta = 3\gamma = 3(180^\circ - 2\alpha) = 3(180^\circ - 140^\circ) = 120^\circ$.

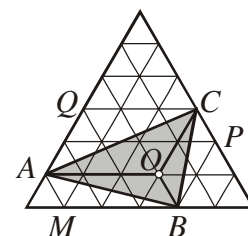


46. Отг. В). Най-малка стойност на разликата ще се получи, ако $a = d + 1$, $b = 0$ и $e = 9$. Тогава възможно най-малката стойност за c остава $c = 1$, а за f – съответно $f = 8$. Това означава, че разликата е най-малко 3. Тази разлика се реализира например в случая $\overline{abc} = 301$ и $\overline{def} = 298$.

47. Отг. А). Ясно е, че едното число е трицифрено, а второто е двуцифрено. Ако a и b са съответно цифрата на десетиците и цифрата на единиците на двуцифреното число, от условието следва, че $100a + 10b + 4 + 10a + b = 301$, т.е. $110a + 11b = 297$. Полученото равенство е еквивалентно с $11(10a + b) = 11 \cdot 27$, откъдето $10a + b = 27$. Единствената възможност е $a = 2$ и $b = 7$. Следователно двете числа са 274 и 27, а сумата от цифрите на десетиците им е $7 + 2 = 9$.

48. Отг. Г). Изразите, които разглеждаме, имат вида $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$, където всяка звездичка отговаря на “+” или на “·”. Ако някоя звездичка, след първата, отговаря на “+”, то заменяйки този “+” с “·”, ще увеличим израза. Това е така, защото $xy > x + y$, ако числата x и y са по-големи от 2 (следва от неравенството $(x-1)(y-1) \geq 1 \Leftrightarrow xy \geq x + y$, като равенство има само при $x = y = 2$). Следователно изразът ще получи най-голяма стойност или когато всички звездички съответстват на умножения, или когато само първата звездичка съответства на събиране. В първия случай ще получим стойност $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$, а във втория случай стойността е $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 1$. Следователно $N = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 1$, откъдето заключаваме, че от посочените твърдения само **Г)** е вярно.

49. Отг. А).



$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2}(S_{AOBM} + S_{BOCP} + S_{AOCQ}) = \frac{1}{2}(6+4+12) = 11, \text{ т.е.}$$

$$S_{ABC} = 11 \text{ cm}^2.$$

50. Отг. 5. Сумата на записаните числа е между $4.18 = 72$ и $5.18 = 90$. Единственото кратно на 17 между тези две числа е 85. Ако заменим всички записани четворки с петици, ще получим 90, защото $5.18 = 90$. Но $90 - 85 = 5$, откъдето следва, че заменените четворки са точно 5 на брой (всяка замяна увеличава сумата с 1).