Конкурсен изпит за НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

За профил *математика* – 7 юли 2004 година

Време за работа 4 астрономически часа.

Задача 1. Дадено е уравнението

$$(1+a)^3 - a^2(3+9x+a) + x = 0,$$

където a е параметър, а x е неизвестно.

а) Решете уравнението.

б) За кои стойности на параметъра a даденото уравнение има поне един положителен корен?

в) Има ли даденото уравнение решение при $a = -\dfrac{4(-2004^4)^5}{12^{21}.167^{20}}$?

Задача 2. Жоро не записал номера на мобилния телефон на приятелката си и забравил последните шест цифри. Той си спомнил, че те образуват шестцифрено число x с различни цифри, последните три от които образуват трицифрено число y, чийто квадрат е равен на x. Обяснете как Жоро е възстановил телефонния номер на приятелката си.

Задача 3. Даден е триъгълник ABC с ъглополовяща BL ($L \in AC$). Върху отсечката BL е построена точка M така, че $AM = AC$ и $\sphericalangle MCB = 30^\circ$. Ако H е средата на отсечката CM, да се докаже, че:

а) разстоянието от точката M до правата BC е два пъти по-малко от дължината на отсечката CM;

б) лъчите $AM^{\rightarrow}$ и $AH^{\rightarrow}$ разделят $\sphericalangle CAB$ на три равни части;

в) $\sphericalangle AMB = 150^\circ$;

г) $AB > BC$.

Решения

Задача 1. а) Извършваме еквивалентните преобразувания:

$$\begin{gathered}(1+a)^3 - a^2(3+9x+a) + x = 0 \iff \\ \iff a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 3a^2 - 9a^2x - a^3 + x = 0 \iff \\ \iff (-9a^2+1)x + 3a + 1 = 0 \iff (9a^2-1)x = 3a+1 \iff \\ \iff (3a+1)(3a-1)x = 3a+1.\end{gathered}$$

I случай: $3a+1=0$, т.е. $a=-\dfrac{1}{3}$. Уравнението добива вида $0.x=0$. Всяко x е решение на това уравнение.

II случай: $3a-1=0$, т.е. $a=\dfrac{1}{3}$. Сега уравнението е $0.x=2$. Това уравнение няма решение.

III случай: $a \neq \pm\dfrac{1}{3}$. В този случай уравнението има едно единствено решение $x_0 = \dfrac{3a+1}{(3a+1)(3a-1)} = \dfrac{1}{3a-1}$.

б) Ако $a=-\dfrac{1}{3}$, всяко x е решение и следователно уравнението има положителен корен.

Ако $a=\dfrac{1}{3}$, уравнението няма корени и следователно няма положителни решения.

Ако $a\neq\pm\dfrac{1}{3}$, уравнението има единствено решение $x_0=\dfrac{1}{3a-1}$. Очевидно то ще бъде положително число, ако знаменателят е положителен, т.е. $3a-1>0$. Решенията на това неравенство са всички числа $a>\dfrac{1}{3}$.

в) Опростяваме дробта

$$a = -\frac{4.(-2004^4)^5}{12^{21}.167^{20}} = \frac{4.(4.501)^{20}}{4^{21}.3^{21}.167^{20}} = \frac{4.(4.3.167)^{20}}{4^{21}.3^{21}.167^{20}} = \frac{4^{21}.3^{20}.167^{20}}{4^{21}.3^{21}.167^{20}} = \frac{1}{3}.$$

При $a=\dfrac{1}{3}$ уравнението няма решение.

Задача 2. Съгласно условието имаме $y^2=x$. Тъй като числото y е образувано от последните три цифри на числото x, то е ясно, че разликата $x-y$ се дели на 1000, т.е. $x-y=1000k$, където k е естествено число. Така получихме $y^2-y=1000k$. Разлагаме двете страни на това равенство на множители:

$$y(y-1) = 2^3.5^3k.$$

Тъй като y и $y-1$ са две последователни естествени числа, то те не могат да се делят едновременно на 2. Аналогично те не се делят едновременно и на 5. Ще разгледаме два случая.

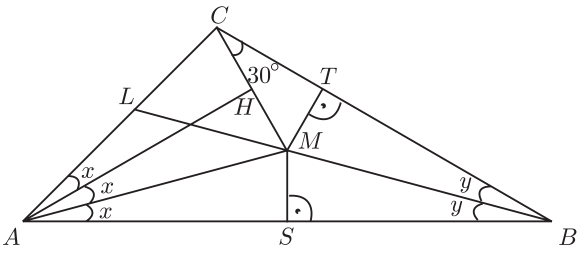
I случай: Нека y се дели на 2 и следователно се дели и на $2^3=8$, а не се дели на 5. В този случай $y-1$ не се дели на 2 и се дели на 5, а следователно и на $5^3=125$. Всички такива трицифрени числа са $125, 375, 625, 875$. Тогава възможните стойности на y са $126, 376, 626$ и 876.

От тези числа само 376 се дели на 8. Тъй като числото $376^2 = 141\,376$ има две равни цифри, то не е решение на задачата.

II случай: Нека y се дели на 5 и следователно и на $5^3=125$, а не се дели на 2, т.е. y трябва да бъде някое от числата $125, 375, 625, 875$.

В този случай $y-1$ не се дели на 5 и се дели на 8. Измежду числата 124, 374, 624, 874 само 624 се дели на 8. Цифрите на числото $625^2 = 390\,625$ са различни. Следователно числото $390\,625$ е решение на задачата.

Задача 3. а) Да спуснем перпендикуляр MT от точката M към страната BC. Дължината на този перпендикуляр е равна на разстоянието от точката M до страната BC. От правоъгълния триъгълник CMT имаме $MT = \frac{1}{2}CM$, тъй като MT е катет срещу ъгъл $30°$.



б) По условие триъгълникът AMC е равнобедрен ($AM = AC$), а отсечката AH е медиана към основата му MC. Следователно MC е ъглополовяща и височина, т.е. $\sphericalangle CAH = \sphericalangle HAM$ и $\sphericalangle AHM = 90°$ (вж. фигурата). Да спуснем перпендикуляра SM от точката M към страната AB. Тъй като BL е ъглополовяща, то

$$SM = TM = \frac{1}{2}CM = HM.$$

Да разгледаме $\triangle AMH$ и $\triangle AMS$. Имаме:

1. $SM = HM$;
2. AM е обща хипотенуза;
3. $\sphericalangle ASM = \sphericalangle AHM = 90°$.

От признака за еднаквост на правоъгълни триъгълници следва, че $\triangle AMH \cong \triangle AMS$. Следователно $\sphericalangle HAM = \sphericalangle MAS$. Като вземем предвид и доказаното погоре равенство, получаваме $\sphericalangle HAM = \sphericalangle MAS = \sphericalangle CAH$, което трябваше да се докаже.

в) Да означим с $x = \sphericalangle HAM$ и с $y = \sphericalangle CBM$. Като вземем предвид, че сумата от ъглите във всеки триъгълник е $180°$, от $\triangle ACH$ намираме $\sphericalangle ACH = 90° - x$, а от $\triangle ABC$ имаме $3x + (90° - x) + 30° + 2y = 180°$. След преобразуване на това равенство получаваме

$$2x + 2y = 60° \iff x + y = 30°.$$

Оттук намираме

$$\sphericalangle AMB = 180° - (\sphericalangle ABM + \sphericalangle BAM) = 180° - (x+y) = 180° - 30° = 150°.$$

г) Тъй като $x + y = 30°$, то $x < 30°$ и $\sphericalangle CAB = 3x < 90°$. От друга страна, $\sphericalangle ACB = (90° - x) + 30° = 120° - x > 90°$.

С това показахме, че $\sphericalangle ACB > \sphericalangle CAB$ и следователно AB е по-голяма от CB, като страна, лежаща в триъгълник срещу по-голям ъгъл.

Указание за оценяване на писмената работа

Задача 1. а) 5 точки б) 3 точки в) 3 точки

Задача 2. 8 точки

Задача 3. а) 2 точки б) 4 точки в) 6 точки

Посочените точки се получават за точно решени условия. При допускане на логически и технически грешки точките се намаляват.

Цялата работа се оценява със слаб 2, ако са получени по-малко от 3 точки. В случай, че получените точки са най-малко 3, окончателната оценка се пресмята по формулата:

$$\text{Оценка} = \frac{1}{9}(\text{получени точки} + 23).$$