Вътрешен профилиращ изпит по математика за прием на ученици след 7. клас в НПМГ „Акад. Л. Чакалов”
31.05.2015 г.

Вариант 1
Отговори и кратки решения

Задача	Отговор
1.	–225
2.	–18
3.	110°
4.	12 cm
5.	35°
6.	100 дни

Задача 7. Намерете най-голямото цяло число, което е решение на неравенството
$2(x-2)(x^2+2x+4)-3(x-1)^3>(3x-1)^2-x(x-5)(x+5)$.

Решение:

$$2(x-2)(x^2+2x+4)-3(x-1)^3>(3x-1)^2-x(x-5)(x+5)$$
$$2(x^3-2^3)-3(x^3-3x^2+3x-1)>9x^2-6x+1-x(x^2-25)$$
$$2x^3-16-3x^3+9x^2-9x+3>9x^2-6x+1-x^3+25x$$
$$-28x>14$$
$$x<-\frac{1}{2}$$

Най-голямото цяло число, което е решение на неравенството е –1.

Задача 8. В един съд в 6000 g вода са разтворени 550 g захар, а в друг съд в 600 g вода са разтворени 900 g захар. Колко разтвор трябва да се прелее от втория съд в първия, за да се получи разтвор, в който захарта е 5 пъти по-малко от водата?

Решение:

<u>I начин</u> Количеството на втория разтвор е 1500 g, а концентрацията му е $\frac{900}{1500}=\frac{3}{5}$.
Означаваме с $5x$ количеството разтвор, което се прелива в първия съд. Захарта в него е $3x$, а водата - $2x$. Съставяме уравнението $6000+2x=5(550+3x)$ Получаваме $x=250$, следователно трябва да се прелее $5.250=1250g$ разтвор.

<u>II начин</u> Количеството на втория разтвор е 1500 g, а концентрацията му е $\frac{900}{1500}=\frac{3}{5}$. В сместа захарта трябва да е 5 пъти по-малко от водата, следователно концентрацията е $\frac{1}{6}$.

Нека от втория разтвор са прелети x g към първия. Тогава

	Количество	Концентрация	Чисто вещество
II разтвор	x	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}x$
Смес	$6550+x$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{5}x+550$

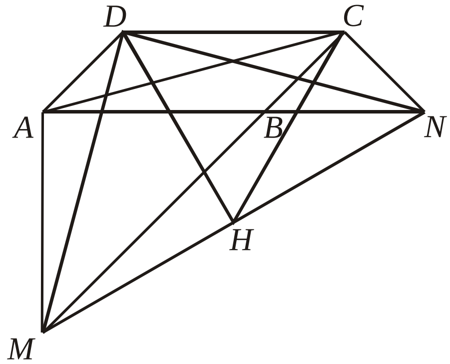
Получаваме уравнението

$\frac{1}{6}\left(6550+x\right)=550+\frac{3}{5}x,$

което има решение $x=1250\,\text{g}$.

Задача 9. В успоредника $ABCD$ $AB=10\,\text{cm}$, $\sphericalangle BAD=45°$, $\sphericalangle BAC=15°$. Точка N лежи на правата AB и $BC=NC$, точка M лежи на правата BC и $AM=AB$, а точка H е средата на MN. Докажете, че $\triangle MND$ е равнобедрен и намерете периметъра на $\triangle CDH$.

Решение: От $ABCD$ – успоредник имаме, че $AD\,||\,BC$.



Тогава $\sphericalangle ABM=\sphericalangle BAD=45°\left(\text{кръстни}\right)$ и

$\sphericalangle NBC=\sphericalangle BAD=45°\left(\text{съответни}\right)$. Но $AB=AM$ и

$CB=CN$, следователно в $\triangle ABM$ и $\triangle BCN$ получаваме, че

$\sphericalangle AMB=\sphericalangle ABM=45°$, $\sphericalangle BNC=\sphericalangle NBC=45°$ и

$\sphericalangle MAB=\sphericalangle BCN=90°$.

Разглеждаме $\triangle MAD$ и $\triangle DCN$

1.$MA=DC$

2.$AD=CN$

3.$\sphericalangle MAD=\sphericalangle DCN=90°+45°$

Следователно $\triangle MAD\cong\triangle DCN$. (I признак)

Получаваме, че $DM=DN\left(\text{съответни елементи}\right)$ и $\triangle MND$ е равнобедрен.

Но аналогично доказваме, че $\triangle DCN\cong\triangle CDA$, откъдето $\sphericalangle CDN=\sphericalangle DCA$. Но от $AB\,||\,CD$, имаме, че $\sphericalangle DCA=\sphericalangle BAC=15°$. Тогава $\sphericalangle AMD=15°$. Така в $\triangle AMD$ получаваме, че $\sphericalangle ADM=30°$. Следователно $\sphericalangle MDN=135°-15°-30°=90°$ и $\triangle MND$ е правоъгълен. По условие точка H е средата на MN, следователно DH и CH са медиани към общата хипотенуза в правоъгълните триъгълници $\triangle MND$ и $\triangle MNC$, откъдето $DH=CH=\frac{1}{2}MN$. Но $\sphericalangle AMN=\sphericalangle MDN+\sphericalangle AMD=45°+15°=60°$. Следователно в правоъгълния $\triangle AMN$ имаме, че $\sphericalangle ANM=30°$. Тогава $AM=\frac{1}{2}MN$. Но $CD=AB=AM$. Така получаваме, че $\triangle CDH$ е равностранен и $P_{\triangle CDH}=3.10=30\,\text{cm}$.

Задача 10. Намерете целите стойности на x и y, за които е изпълнено равенството

$2x^5y-6x^4y^2+6x^3y^3-2x^2y^4-x^5+3x^4y-3x^3y^2+x^2y^3-1=2015.$

Решение:

$2x^5y-6x^4y^2+6x^3y^3-2x^2y^4-x^5+3x^4y-3x^3y^2+x^2y^3-1=2015$

$x^2\left(2x^3y-6x^2y^2+6xy^3-2y^4-x^3+3x^2y-3xy^2+y^3\right)=2016$

$x^2\left(2y\left(x^3-y^3\right)-6xy^2\left(x-y\right)+3xy\left(x-y\right)-\left(x^3-y^3\right)\right)=2016$

$x^2\left(\left(2y-1\right)\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)-3xy\left(x-y\right)\left(2y-1\right)\right)=2016$

$x^2(2y-1)(x-y)(x^2+xy+y^2-3xy)=2016$

$x^2(2y-1)(x-y)^3=2016$

$2016=2^5.3^2.7=2^3.2^2.3^2.7$

Тъй като x и y са цели числа, то $x^2, 2y-1$ и $(x-y)^3$ са цели, $x^2>0$ и $2y-1$ е нечетно.

Възможностите са:

I. $2y-1=7$, $x^2=6^2$, $x-y=2$. От първите две равенства последователно получаваме $y=4$, $x=\pm 6$. Третото равенство е изпълнено при $x=6$ и двойката $x=6$, $y=4$ е решение.

II. $2y-1=-7$, $x^2=6^2$, $x-y=-2$. От първите две равенства последователно получаваме $y=-3$, $x=\pm 6$. Третото равенство не е изпълнено за тези стойности и това не е решение.

III. $2y-1=63$, $x^2=2^2$, $x-y=2$. От първите две равенства последователно получаваме $y=32$, $x=\pm 2$. Третото равенство не е изпълнено за тези стойности и това не е решение.

IV. $2y-1=-63$, $x^2=2^2$, $x-y=-2$. От първите две равенства последователно получаваме $y=-31$, $x=\pm 2$. Третото равенство не е изпълнено за тези стойности и това не е решение.

Окончателно $x=6; y=4$.