| | |
|---|---|
| | **НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „АКАД. Л. ЧАКАЛОВ"** |

**Задача 1.** Намерете числената стойност на израза $3c+cb-c^2+b^2+b^3c^2-c^5$ за $c=b=-3$.

**Решение:**

I-ви начин:

**1.** Представяне $3c+cb+b^2-c^2+c^2\left(b^3-c^3\right)$ .

**2.** Съобразяване на $b^2-c^2=0$ и $b^3-c^3=0$, защото са равни.
**3.** Пресмятане на $bc=9$.
**4.** Верен отговор 0.

II-ри начин:
При пряко заместване:
$\left(-3\right)^2=9$.
$\left(-3\right)^3=-27$.
$\left(-3\right)^5=-243$.
Довършване и получаване на отговор 0.

**Задача 2.** Да се реши уравнението $\frac{4-x}{-4}+\frac{2x-15}{3}=\frac{3x+4}{8}$.

**Решение:**
След еквивалентни преобразувания получаваме

$-24+6x+16x-120=9x+12$.
Тогава уравнението добива вида
$13x=156$, откъдето получаваме $x=12$.

**Задача 3.** Да се реши уравнението $\left|(-2x+1)^2 - x(4x-5)\right| = B$, където

$$B = \frac{2^{n+3}}{2^n + 2^n + 2^n + 2^n} \left(n \in \mathbb{N}\right).$$

**Решение:**

$B = \frac{2^{n+3}}{4.2^n} = \frac{2^{n+3}}{2^{n+2}} = 2$

Тогава уравнението добива вида

$\left|1 - 4x + 4x^2 - 4x^2 + 5x\right| = 2$, което е еквивалентно с

$|x+1| = 2$

**I сл.)** $x+1=2$**,** т.е. $x_1 = 1$

**II сл.)** $x+1=-2$**,** т.е. $x_2 = -3$

**Задача 4.** Да се докаже, че ако $a$ е най-малкото цяло решение на неравенството

$$\frac{9x+5}{4}-\frac{1}{2}\left(2-\frac{3-2x}{9}\right)-7x<0,$$

то неравенствата

$$(12x+a)(a-x)+(3x-2)^2-3x(7-x)+17a<0 \quad \text{и} \quad x>1$$

са равносилни.

**Решение:**

$$\frac{9x+5}{4}-1+\frac{3-2x}{18}-7x<0 \qquad /.36$$

$$9(9x+5)-36+2(3-2x)-36.7x<0$$

$$81x+45-36+6-4x-252x<0$$

$$175x>15$$

$$x>\frac{15}{175}$$

Намиране, че най-малкото цяло решение $a=1$.

$$(12x+1)(1-x)+(3x-2)^2-3x(7-x)+17<0$$

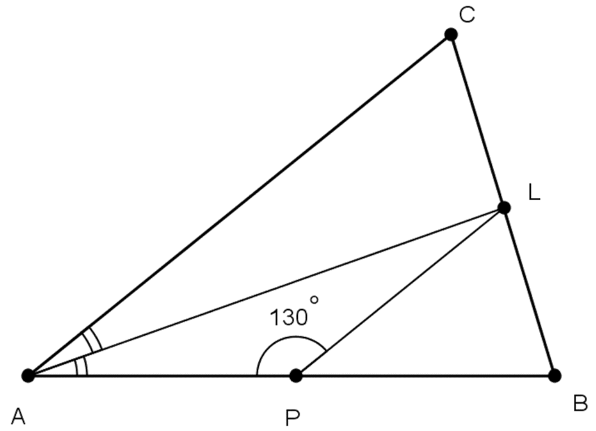
$$11x-12x^2+1+9x^2-12x+4-21x+3x^2+17<0$$

$$22x>22$$

$$x>1$$

**Задача 5.** В $\triangle ABC$ е построена ъглополовящата $AL$. Правата през $L$, която е успоредна на $AC$ пресича страната $AB$ в точка $P$. Да се намерят ъглите на $\triangle ABC$, ако $\sphericalangle APL = 130^\circ$ и $\sphericalangle ACB : \sphericalangle ABC = 3:2$.

**Решение:**



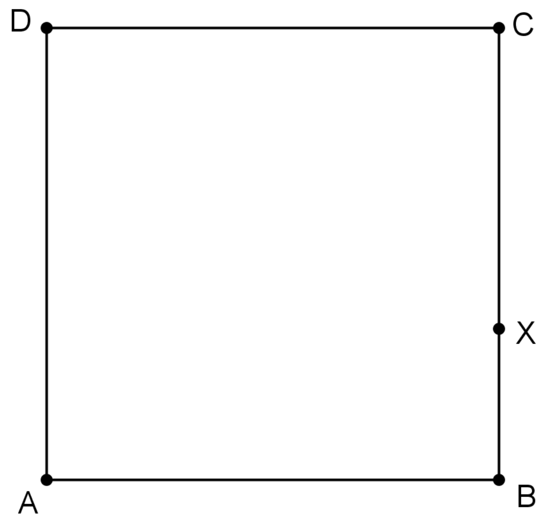

Нека $\sphericalangle ACB = 3x$, а $\sphericalangle ABC = 2x$. Тогава от $(AC \parallel PL) \times AB$ следва, че $\sphericalangle CAB + 130^\circ = 180^\circ$, т.е. $\sphericalangle CAB = 50^\circ$.

От теоремата за сбор на ъглите в $\triangle ABC$ имаме, че $5x + 50^\circ = 180^\circ$, откъдето $x = 26^\circ$.

Следователно $\sphericalangle ACB = 78^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 52^\circ$.

**Задача 6.** Двама бегачи се движат по квадрат $ABCD$ в различни направления с постоянна скорост. Когато стартират от върха $A$, единият достига $B$, когато другият достига $C$ без да са се срещали. Ако страната на квадрата е 30 м, то на колко метра е равно разстоянието от точката на срещата им до върха $B$.

**Решение:**




**1.** Определяне, че едната скорост е два пъти по-голяма от другата.
/Например: $AB + DC = 2AB$ **.**Понеже времето е едно и също, скоростта е два пъти по-голяма./

**2.** $CB$ се разделя в отношение 2:1 считано от $C$ или 1:2 считано от $B$.
( когато по –бързия е в $C$, а по – бавният в $B$ те започват да се движат по страната $BC$ в противоположни посоки и понеже съотношението на скоростите е 1:2, а до момента на срещата изминава еднакво време, то и изминатите от тях разстояния се отнасят както 1:2 )

**3.** Ако $X$ е точката на срещане, $BX = 10$. ( понеже $CX = 2BX$, а $CX + BX = BC = 30$, то $BX = \frac{1}{3}.30 = 10$)

**Задача 7.** Две фирми произвеждат общо 720 чифта обувки на ден. Първата фирма увеличава дневната си производителност с $15\%$, а втората – с $10\%$ и те вече произвеждат общо 807 чифта обувки за един ден. Намерете по колко чифта обувки на ден произвежда всяка от фирмите, след като увеличили производителността си.

**Решение:**

Нека $x(x>0)$ е производителността на първата фирма преди увеличението, тогава производителността на втората фирма е $720-x$. След като увеличили производителностите си, производителността на първата фирма е $x+\frac{15}{100}x$, а на втората е $720-x+\frac{10}{100}(720-x)$. Тогава съставяме уравнението

$$x+\frac{15}{100}x+720-x+\frac{10}{100}(720-x)=807,$$

откъдето получаваме, че производителността на първата фирма преди увеличението е $x=300$ чифта обувки на ден, а производителността на втората е 420 чифта обувки. Така след като увеличава производителността си първата фирма произвежда по 345 чифта обувки на ден, а втората по 462 чифта обувки на ден.

**Задача 8.** Да се докаже, че за всяко естествено число $n$, числото $m=\frac{10^n+65}{15}$ е цяло.

**Решение:**

I-ви начин:

**1.** $\frac{10^n+65}{15}=\frac{10^n+5+60}{15}=\frac{10^n+5}{15}+4$.

**2.** $10^n+5$ се дели на 5.

**3.** $10^n+5=10.....05$ и се дели на 3 по признак за делимост.

**4.** Ако едно число се дели и на 3, и на 5, то числото се дели на 15, понеже 3 и 5 са прости числа.

II-ри начин:

**1.** $10^n+65=1000........65$.

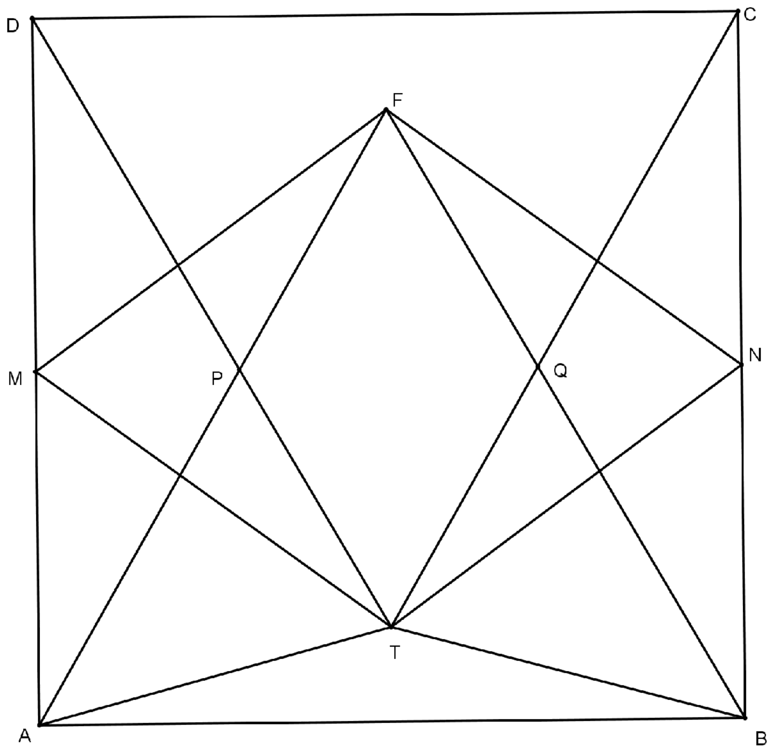
**2.** $m$ се дели на 5 по признак за делимост.

**3.** $m$ се дели на 3 по признак за делимост.

**4.** Ако едно число се дели и на 3, и на 5, то числото се дели на 15, понеже 3 и 5 са прости числа.

**Задача 9.** Даден е квадратът $ABCD$. Построени са равностранните триъгълници $ABF$ и $CDT$ по такъв начин, че $F$ и $T$ са вътрешни точки за квадрата. Ако $M$ и $N$ са съответно средите на $AD$ и $BC$, да се докаже, че $MTNF$ е ромб.

**Решение:**




I-ви начин:

**1.** Точките $M, N$ - среди съответно на $AD$ и $BC$ и $ABCD$ е квадрат $\Rightarrow AD = BC$.

От двете неща следва, че $AM = MD = BN = NC = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{BC}{2}$.

**2.** $\triangle ABF$ - равностранен $\Rightarrow AF = BF = AB$. Аналогично $\triangle DCT \Rightarrow DT = CT = DC$ и следователно $AF = BF = DT = CT$.

**3.** $ABCD$ е квадрат $\Rightarrow \sphericalangle DAB = 90^\circ$. $\triangle ABF$ - равностранен $\Rightarrow \sphericalangle FAB = 60^\circ$.
$\sphericalangle DAF = \sphericalangle DAB - \sphericalangle FAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Аналогично $\sphericalangle FBC = \sphericalangle BCT = \sphericalangle ADT = 30^\circ$.

**4.** Разглеждаме $\triangle AMF$ и $\triangle BNF$

1. $AM = BN$
2. $AF = BF$
3. $\sphericalangle MAF = \sphericalangle NBF = 30^\circ \Rightarrow \triangle AMF \cong \triangle BNF$ по I-ви признак.

Аналогично $\triangle AMF \cong \triangle DMT \cong \triangle CNT \Rightarrow MF = NF = TM = TN \Rightarrow MTNF$ е ромб

II-ри начин:

Доказателство, че $TPFQ$ е успоредник:

**1.** $\sphericalangle AFB = \sphericalangle CTD$.

**2.** $\triangle BQC \cong \triangle AQD$.

**3.** $\sphericalangle BQC = \sphericalangle TQF$ и $\sphericalangle APD = \sphericalangle TPF$ (връхни).

**4.** $TPFQ$ е успоредник (две двойки равни срещуположни ъгли).

Доказателство, че две съседни страни на успоредника са равни:

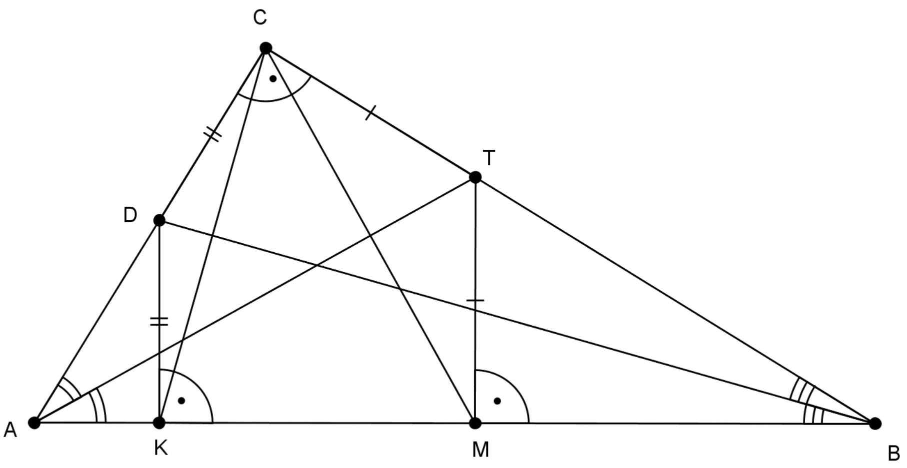
**1.** $BQ = AP$ (от еднаквост на триъгълници).

**2.** $BF = AF$ (по условие).

**3.** $FQ = BF - BQ = AF - AP = FP$.

**Задача 10.** В правоъгълния триъгълник $ABC\left(\sphericalangle ACB = 90°\right)$ са прекарани ъглополовящите $BD$ и $AT$ $\left(D \in AC, T \in BC\right)$.Отсечките $DK$ и $TM$ са перпендикулярни на хипотенузата $AB$ $\left(K \in AB, M \in AB\right)$. Да се намери $\sphericalangle KCM$ .

**Решение:**




От $BD$ – ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$ имаме, че $DK = DC$ (като разстояния от точка $D$ до раменете на ъгъла). Аналогично от $AT$ – ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$ имаме, че $TM = CT$ .Нека $\sphericalangle CAB = \alpha$ , тогава $\sphericalangle ABC = 90^\circ - \alpha$ , $\sphericalangle CDK = 90^\circ + \alpha$ ( външен ъгъл за $\triangle AKD$ ) и $\sphericalangle CTM = 180^\circ - \alpha$ ( външен ъгъл за $\triangle TMB$ ).

От равнобедрения $\triangle CTM$ имаме, че $\sphericalangle TCM = \sphericalangle TMC = \dfrac{180^\circ - \left(180^\circ - \alpha\right)}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$ , а от рвнобедрения $\triangle CDK$ имаме, че $\sphericalangle DCK = \sphericalangle DKC = 45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$ .

Тогава $\sphericalangle KCM = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACK - \sphericalangle BCM = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} - 45^\circ + \dfrac{\alpha}{2} = 45^\circ$ .