	НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „АКАД. Л. ЧАКАЛОВ”

Вътрешен профилиращ изпит по математика за прием в НПМГ 03.06.2012 г. ВАРИАНТ 2

Примерни кратки решения

Задача 1. Да се реши уравнението $|x| = 2012 - 2011 + 2010 - 2009 + ... + 2 - 1$.

Решение: $|x| = \underbrace{1+1+...+1}_{1006 \text{ пъти}}$

$|x| = 1006$

$x = 1006$ или $x = -1006$

Задача 2. В магазин продали на един купувач 25% от наличното в магазина сирене, на втори купувач – 30% от останалото сирене, а на трети – 40% от новия остатък Колко процента от сиренето останали непродадени?

Решение: Нека x е наличното в магазина сирене.

След първата продажба в магазина са останали $x - 25\%x = x - 0,25x = 0,75x$.

След втората продажба са останали $0,75x - 0,3.0,75x = 0,7.0,75x = 0,525x$.

След третата продажба са останали $0,525x - 0,4.0,525x = 0,6.0,525x = 0,315x$

Следователно в магазина са останали 31,5% от първоначалното количество сирене.

При работа с обикновени дроби резултатите са

Остатък след I продажба $\frac{3}{4}x$;

Остатък след II продажба $\frac{21}{40}x$;

Остатък след III продажба $\frac{63}{200}x$.

Задача 3. Решете неравенството $\frac{x(x-5)}{4} - 2 > \frac{3x(x+1)}{2} - \frac{5x^2}{4}$ и проверете дали числото $M = \frac{-2^3.4^3}{22.2^2.(-4)^2}$ е негово решение.

Решение: $\frac{x(x-5)}{4} - 2 > \frac{3x(x+1)}{2} - \frac{5x^2}{4}$

$\frac{x^2-5x}{4} - 2 > \frac{3x^2+3x}{2} - \frac{5x^2}{4}$

$x^2 - 5x - 8 > 6x^2 + 6x - 5x^2$

$-11x > 8$

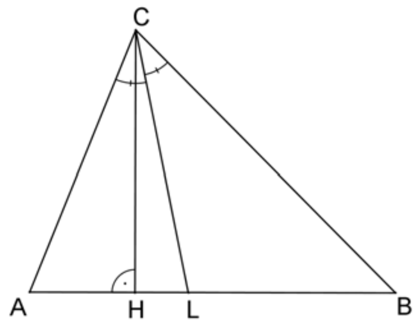
$x < -\frac{8}{11}$

$M = \frac{-2^3.4^3}{22.2^2.(-4)^2} = \frac{-2^9}{11.2^7} = -\frac{4}{11}$

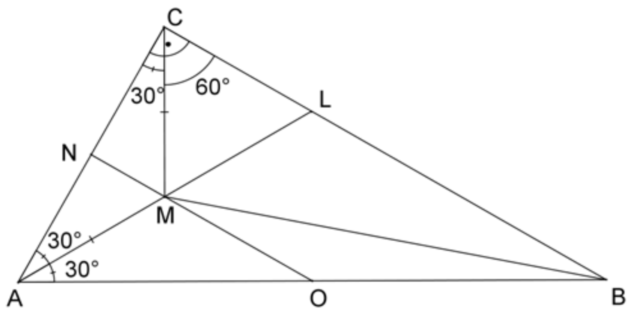
Следователно числото M не е решение на неравенството.

Задача 4. Докажете, че ако ъглополовящата на даден ъгъл в триъгълника го разделя на два равнолицеви триъгълника, то триъгълникът е равнобедрен.

Решение:



Нека $CL\left(L \in AB\right)$ е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$, а $CH\left(H \in AB\right)$ е височина. По условие $S_{\triangle ALC} = S_{\triangle BLC}$ или $\frac{AL.CH}{2} = \frac{BL.CH}{2}$. Следователно $AL = BL$. Щом $AL = BL$, то L е среда на AB. Получаваме, че в $\triangle ABC$ CL е едновременно медиана и ъглополовяща, следователно $\triangle ABC$ е равнобедрен.



Задача 5. В правоъгълния $\triangle ABC\left(\sphericalangle ACB = 90°\right)$ симетралата на катета AC и ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ се пресичат в точка M. Ако хипотенузата AB има два пъти по-голяма дължина от катета AC, то намерете мярката на $\sphericalangle MCB$ в градуси.

Решение:

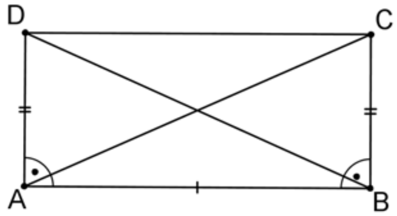
Щом $AB = 2AC$ в правоъгълен триъгълник, то $\sphericalangle ABC = 30°$ и $\sphericalangle BAC = 60°$. AL е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$, следователно $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAC = 30°$. Точка M е от симетралата на $AC \Rightarrow AM = MC \Rightarrow \triangle AMC$ е равнобедрен и $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MAC = 30°$. Тогава $\sphericalangle MCB = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACM = 90° - 30° = 60°$.

Задача 6. За да изпълни една поръчка за ушиване на мъжки панталони в определен срок, шивашко ателие трябвало да шие по 45 панталона дневно. След два дни работа шивачите увеличили дневната си производителност с 5 панталона, поради което за определения срок ушили 100 панталона над плана. Намерете колко панталона трябва да се ушият по план.

Решение:

Означаваме с x времето, необходимо за ушиване на панталоните по план. Тъй като производителността по план е 45 панталона на ден, то цялата работа по план е $45x$. За първите два дни били ушити 90 панталона. В оставащите $x-2$ дни $\left(x > 2\right)$ ушивали по 50 панталона на ден и ушили $50\left(x-2\right)$ панталона. Тъй като ушили със 100 панталона над плана, съставяме уравнението $90 + 50\left(x-2\right) = 45x + 100$ Получаваме, че $x = 22$ дни. Следователно по план е трябвало да се ушият 990 панталона.

Задача 7. Разгледайте следните две твърдения:
I. В правоъгълника диагоналите са равни.
II. Ако в един четириъгълник диагоналите са равни, той е правоъгълник.
За всяко от двете твърдения определете дали е вярно или не. Ако е вярно, го докажете, а в противен случай го опровергайте с пример.

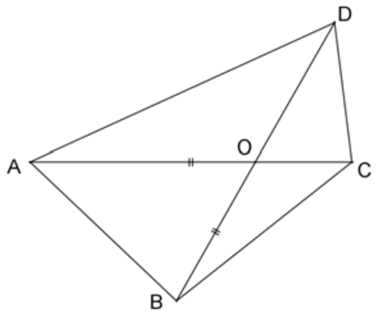


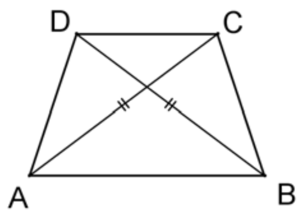
Решение:
I. Твърдението е вярно.
Разглеждаме $\triangle ABD$ и $\triangle BAC$.
1. AB – обща.
2. $AD = BC$
3. $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA = 90^\circ$

Следователно $\triangle ABD \cong \triangle BAC\,(\text{I пр.})$ и получаваме, че $AC = BD$.

II. Твърдението не е вярно.

Примери:

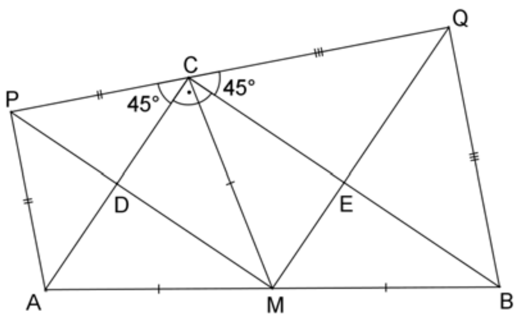




- Равнобедрен трапец;
- Четириъгълник, чиито диагонали са равни, но поне един от тях не се разполовява от пресечната точка на двата диагонала.

Задача 8. Даден е правоъгълен $\triangle ABC\,(\sphericalangle ACB = 90^\circ)$. Външно за триъгълника са построени правоъгълните равнобедрени триъгълници $\triangle ACP$ и $\triangle BCQ$ с хипотенузи съответно AC и BC. Ако точка M е среда на страната AB, да се докаже, че $\triangle PMQ$ е равнобедрен и правоъгълен.

Решение:



Триъгълниците APC и BQC са равнобедрени и правоъгълни следователно $\sphericalangle PCA = \sphericalangle QCB = 45^\circ$.
Тогава $\sphericalangle PCQ = \sphericalangle PCD + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCQ = 180^\circ \Rightarrow P, C, Q$ лежат на една права. Построяваме медианата CM в $\triangle ABC$, който е правоъгълен. Следователно

$$CM = \frac{1}{2}AB = AM = BM\ .$$

Разглеждаме $\triangle APM$ и $\triangle CPM$:
1. $AM = MC$
2. PM - обща
3. $AP = PC$

Следователно $\triangle APM \cong \triangle CPM\,(\text{III пр.})$. Тогава $\sphericalangle APM = \sphericalangle CPM = 45^\circ$. Аналогично получаваме, че $\sphericalangle CQM = 45^\circ \Rightarrow \triangle PQM$ е равнобедрен и правоъгълен.

Задача 9. Намерете всички двойки прости числа x и y, които удовлетворяват равенството

$$5xy^2 - 2y^2 - 10xy + 5x + 4y = 2014.$$

Решение:
Представяме равенството във вида
$5x\left(y^2 - 2y + 1\right) - 2\left(y^2 - 2y + 1\right) = 2012$.

След разлагане на множители получаваме $\left(5x - 2\right)\left(y - 1\right)^2 = 503.2^2$.

Тогава имаме две възможности:
I. $y - 1 = 2 \quad \cup \quad 5x - 2 = 503$, откъдето $x = 101, \quad y = 3$;
II. $y - 1 = 1 \quad \cup \quad 5x - 2 = 2012$, откъдето $y = 2, \quad x = \dfrac{2014}{5}$, което е невъзможно, защото x е естествено число. Окончателно $x = 101$, $y = 3$.

Задача 10. Да се докаже, че произведението на четири последователни естествени числа, увеличено с единица, е точен квадрат на естествено число.

Решение: Нека последователните естествени числа са $x, x+1, x+2, x+3$.
Разглеждаме израза $x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)+1 = x\left(x+3\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)+1 = \left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)+1 =$
$= \left(x^2+3x\right)^2 + 2\left(x^2+3x\right)+1 = \left(x^2+3x+1\right)^2$.