



# НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ

„АКАД. ЛЮБОМИР ЧАКАЛОВ“

Лицей към СУ „Св. Климент Охридски“

София 1164, ул. Бигла 52, тел. 862 83 63, 862 29 66

e-mail: npmg@npmg.org, npmg\_sofia@abv.bg, skype: npmg\_sofia

http://www.npmg.org, http://mathnpmg.blogspot.com

## Конкурсен изпит по математика за НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

Вариант 1

06.06.2010 г.

**Задача 1.** Намерете най-малкото цяло число, което е решение на неравенството

$$(x+3)^2 - x(x-1)(x+1) \geq (x+2)(x-2) + (1-x)(x^2+x+1)$$

**Задача 2.** Решете уравнението  $2x(x^2+1)(x^2-2|2-2^2|) = 0$ .

**Задача 3.** Да се реши уравнението  $|(-x-1)^2 - x(x+1)| = 2M$ , където  $M = \frac{2^{2010} - (2^{502})^4}{4^{1004} + 2^{2009}}$ .

**Задача 4.** В три торби има общо 36 килограма брашно. Втората торба съдържа  $\frac{9}{25}$  от количеството брашно в първата торба, а третата торба съдържа  $22\frac{2}{9}\%$  от количеството брашно във втората торба. По колко килограма брашно има във всяка торба.

**Задача 5.** Една обуварска фирма сключила договор с търговска фирма да ѝ предоставя по 180 чифта обувки на ден от даден модел. В действителност обуварската фирма произвеждала с 15 чифта обувки на ден повече от договореното, поради което един ден преди изтичане на договора тя произвела 120 чифта обувки над договореното количество. Колко чифта обувки е трябвало да произведе обуварската фирма по договор?

**Задача 6.** Даден е  $\triangle ABC$  с  $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ ,  $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ , височина  $CH$  ( $H \in AB$ ) и медиана  $BM$  ( $M \in AC$ ). Да се намери големината на  $\sphericalangle BMC$ .

**Задача 7.** В правоъгълния  $\triangle ABC$  ( $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ ) височината е  $CD$  ( $D \in AB$ ), ъглополовящата на  $\sphericalangle BCD$  е  $CL$  ( $L \in AB$ ), точката  $M$  е средата на  $CL$  и правата  $AM$  пресича  $CD$  и  $CB$  съответно в точките  $Q$  и  $S$ . Да се докаже, че  $CQLS$  е ромб.

**Задача 8.** Даден е тупоъгълен  $\triangle ABC$  ( $\sphericalangle ABC > 90^\circ$ ), в който ъглополовящата на  $\sphericalangle BAC$  пресича страната  $BC$  в точка  $M$ . Избрана е точка  $P$  от страната  $AC$ , така че  $\sphericalangle PMC = \sphericalangle BAC$ . Да се докаже, че  $MP = MB$ .

**Задача 9.** Да се докаже, че ако  $a$ ,  $b$  и  $c$  са дължините на страните на триъгълник, то

$$a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2.$$

**Задача 10.** Докажете, че уравнението  $x^2 + 2010 = y^2$  няма решение в цели числа.

Време за работа: 4 астрономически часа

*Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки.*

*Пожелаваме Ви успешна работа!*