Конкурсен изпит за НПМГ „Акад. Л. Чакалов“

За профил *математика* – 7 юли 2005 година

Време за работа 4 астрономически часа.

Задача 1. Даден е изразът $A = x^2(a-2) - 2x(a+1)(a-2) - 4a(2-a)$.

а) Да се представи A като произведение на три множителя.

б) За кои стойности на параметъра a уравнението

$$x^2(a-2) - 2x(a+1)(a-2) - 4a(2-a) = 0$$

има два различни корена?

в) Да се докаже, че ако $a = 3$ и $x > 6$, то $A > 0$.

г) За кои стойности на x е изпълнено неравенството $|A| > (x-2)^2$, ако $a = x$?

Задача 2. Между НПМГ и жк „Дружба“ е организирано движение с маршрутни таксита. Всяко от таксита изминава целия маршрут от НПМГ до жк „Дружба“ и обратно до НПМГ за 40 минути. В началната спирка при НПМГ никога не стои повече от едно такси.

а) Колко коли обслужват линията и колко минути е престоят в началната спирка, ако колите се движат през интервали от 7 минути?

б) Колко коли обслужват линията и колко минути е престоят в началната спирка, ако колите се движат през интервали от 7,5 минути?

Задача 3. За триъгълника ABC е известно, че $AB = BC$ и че ъглополовящата CL от върха C, височината AH от върха A и симетралата на страната AC се пресичат в точката O.

а) Да се докаже, $\triangle ABC$ е равностранен. Точките T и K са избрани съответно върху страните AB и AC така, че $BT = AK$.

б) Да се докаже, че ако N е пресечната точка на CT и BK, то $CT = BK$ и $\sphericalangle BNT = 60^\circ$.

в) Да се докаже, че ако точката M е средата на отсечката KT, то $CT = 2AM$.

Решения

Задача 1. а) Извършваме преобразуванията

$$A = x^2(a-2) - 2x(a+1)(a-2) - 4a(2-a) = (a-2)(x^2 - 2ax - 2x + 4a) =$$
$$= (a-2)(x(x-2a) - 2(x-2a)) = (a-2)(x-2a)(x-2)$$

б) От условие а) следва, че

$$x^2(a-2) - 2x(a+1)(a-2) - 4a(2-a) = 0 \iff (a-2)(x-2a)(x-2) = 0.$$

Оттук виждаме, че при $a = 2$ всяко x е решение на даденото уравнение. Следователно $a = 2$ не е решение на задачата.

Нека $a \neq 2$. Тогава уравнението има два корена $x_1 = 2a$ и $x_2 = 2$.

Тези корени ще са различни при $2a \neq 2$, т.е. при $a \neq 1$. Следователно уравнението има два различни корена за всяко $a \neq 1$ и $a \neq 2$.

в) При $a = 3$ имаме $A = (a-2)(x-2a)(x-2) = (x-6)(x-2)$. Очевидно при $x > 6$ имаме $x - 6 > 0$ и $x - 2 > 0$ и следователно $A > 0$, като произведение на два положителни множителя.

г) При $a = x$ разглежданото неравенство придобива вида

$$|(x-2)(-x)(x-2)| > (x-2)^2 \iff (x-2)^2|x| > (x-2)^2.$$

Ако $x = 2$ лявата и дясната страна на това неравенство са равни на нула. Следователно $x = 2$ не е решение на задачата.

За всяко $x \neq 2$ имаме $(x-2)^2 > 0$ и следователно

$$(x-2)^2|x| > (x-2)^2, x \neq 2 \iff |x| > 1, \neq 2 \iff x \in (-\infty; -1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty).$$

Задача 2. а) Тъй като колите се движат през 7 минути, то престоят на началната спирка трябва да бъде по-малък от 7 минути, т.е. $0 < a < 7$.

Времето, за което първата кола изминава целия маршрут заедно с почивката, е $40 + a$. За това време през 7 минути са тръгвали последователно всички коли. Тогава броят на всичките коли е $\dfrac{40+a}{7}$.

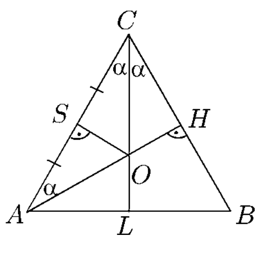
Единственото естествено число между 40 и 47, което се дели на 7 без остатък, е 42. Следователно времето за престой е $a = 2$ минути, а броят на колите е 6.

б) Аналогично на а) броят на всички коли е $\dfrac{40+a}{7,5}$, където $0 < a < 7,5$. Тогава

$$\frac{40}{7,5} = \frac{400}{75} = \frac{16}{3} < \frac{40+a}{7,5} < \frac{4,75}{7,5} = \frac{19}{3}.$$

Отново единственото естествено число между $\dfrac{16}{3} = 5\dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{19}{3} = 6\dfrac{1}{3}$, което удовлетворява тези неравенства, е 6. Това означава, че броят на колите отново е 6. В този случай престоят ще бъде $6.7,5 - 40 = 5$ минути.

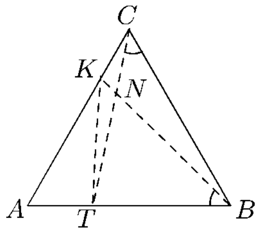
Задача 3. а) Имаме:
$\sphericalangle SCO = \sphericalangle HCO = \alpha$ (CL – ъглополовяща);
$\sphericalangle CAO = \sphericalangle ACO = \alpha$ (OS – симетрала);
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = 2\alpha$ ($AB = BC$)



Оттук виждаме, че $\sphericalangle BAO = \sphericalangle BAC - \sphericalangle OAC = 2\alpha - \alpha = \alpha = \sphericalangle CAO$.

С това показахме, че AH е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$. Но AH е и височина. Следователно $AB = AC$, което означава, че $\triangle ABC$ е равностранен.

б) Да разгледаме триъгълниците BTC и ABK. Имаме:



1) $BT = AK$ (по условие);

2) $\sphericalangle KAB = \sphericalangle TCB = 60°$;

3) $AB = BC$.

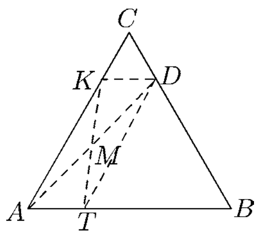
(2) и 3) следват от доказаното в а), че $\triangle ABC$ – равностранен).

Съгласно първи признак $\triangle BTC \cong \triangle ABK$. Следователно $CT = BK$ и $\sphericalangle ABK = \sphericalangle BCT$.

От друга страна, $\sphericalangle TNB = \sphericalangle NCB + \sphericalangle NBC$ като външен ъгъл за $\triangle NBC$. Оттук намираме $\sphericalangle TNB = \sphericalangle NCB + \sphericalangle NBC = \sphericalangle TBN + \sphericalangle NBC = \sphericalangle TBC = 60°$.

в) Построяваме $KD \| AB, D \in BC$. Триъгълникът DKC е равностранен, тъй като ъглите му са равни на 60° ($\sphericalangle CKD = \sphericalangle CAB$ – съответни). Тогава

$$BD = BC - CD = AC - CK = AK = BT.$$



Следователно $\triangle BDT$ е равностранен (равнобедрен триъгълник с $\sphericalangle TBD = 60°$). Така получихме, че $\sphericalangle BTD = 60° = \sphericalangle CAB$. От това следва, че $AK \| DT$. Тогава четириъгълникът $ATDK$ е успоредник. Тъй като диагоналите на успоредника се разполовяват, то AD минава през средата M на KT и $AD = 2AM$.

Разглеждаме $\triangle ABD$ и $\triangle BCT$:

1) $AB = BC$ ($\triangle ABC$ е равностранен);

2) $BD = BT$ (доказано по-горе);

3) $\sphericalangle ABC$ – общ.

Следователно $\triangle ABD \cong \triangle BCT$. Оттук получаваме $CT = AD = 2AM$.

Указание за оценяване на писмената работа

Задача 1.	а)	2 точки	б)	2 точки	в)	2 точки	г)	2 точки
Задача 2.	а)	4 точки	б)	3 точки				
Задача 3.	а)	2 точки	б)	4 точки	в)	3 точки		4 точки

Указаните точки се получават за пълно и обосновано решение. При неточни обяснения (независимо, че са направени верни изчисления) и при технически грешки се поставят по-малко точки. При по-малко от 3 точки оценката е слаб. В случай, че получените точки са най-малко 3, окончателната оценка се получава по формулата

$$\text{Оценката} = \frac{\text{Общ брой на получените точки} + 24}{9}.$$