МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

20 май 2024 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1.	В	3
2.	Б	3
3.	Б	3
4.	А	3
5.	Б	3
6.	Г	4
7.	Б	4
8.	Б	4
9.	А	4
10.	В	4
11.	А	4
12.	Б	4
13.	Г	4
14.	В	4
15.	Г	4
16.	а) $a=-3$, $b=-4$ $P(x)=(x-1)(x-3)^2$ $Q(x)=-\left(x-1\right)\left(2x+1\right)\left(x-4\right)$ б) $x\in\left(-\frac{1}{2};1\right)\cup\left(1;3\right)\cup\left(3;4\right)$	15

17.	а) $f(x)$ е растяща за $x \in (-2;2)$ $f(x)$ е намаляваща за $x \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ $f_{\min}(x) = f(-2) = -\frac{1}{4}$, $f_{\max}(x) = f(2) = \frac{1}{4}$ б) НМС: $f(-2) = -\frac{1}{4}$, НГС: $f(2) = \frac{1}{4}$ в) $f(x)$ е изпъкнала за $x \in \left(-2\sqrt{3};0\right) \cup \left(2\sqrt{3};+\infty\right)$ $f(x)$ е вдлъбната за $x \in \left(-\infty;-2\sqrt{3}\right) \cup \left(0;2\sqrt{3}\right)$ Инфлексни точки: $M_1\left(-2\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $M_2(0;0)$ и $M_3\left(2\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$.	15
18.	а) $S = \frac{\sqrt{17}}{2}$ cm^2 б) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm	15

Задача 16.

Решение:

а) Със схемата на Хорнер се установява, че корените на $P(x)=0$ са $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 3$.

Тогава $Q(1) = a+b+7 \Rightarrow a+b+7=0$ и $Q(-1) = b-a+11 \Rightarrow b-a+11=10$.

Решаване на системата $\left|\begin{array}{l} a+b+7=0 \\ b-a+11=10 \end{array}\right.$, откъдето се получава $a=-3$, $b=-4$.

Тогава $Q(x) = -2x^3 + 9x^2 - 3x - 4$.

Със схемата на Хорнер се намира, че другите два корена на $Q(x)=0$ са $-\frac{1}{2}$ и 4.

Тогава $P(x) = (x-1)(x-3)^2$ и $Q(x) = -(x-1)(2x+1)(x-4)$.

б) Неравенството е във вида: $-(x-1)^2(x-3)^2(2x+1)(x-4)>0$.

С метода на интервалите се намират решенията $x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\cup(1;3)\cup(3;4)$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $a=-3$, $b=-4$	8 точки
$P(x)=(x-1)(x-3)^2$ и $Q(x)=-(x-1)(2x+1)(x-4)$.	3 точки
б) $x\in\left(-\dfrac{1}{2};1\right)\cup(1;3)\cup(3;4)$	4 точки

Задача 17.

Решение:

а) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}\quad x\in(-\infty;+\infty)$

Намиране $f'(x)=\dfrac{x^2+4-2x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow= -x^2+4=0$ с корени $x_{1/2}=\pm 2$

За $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$: $f'(x)<0$, т.е. $f(x)$ е намаляваща.

За $x\in(-2;2)$: $f'(x)>0$, т.е. $f(x)$ е растяща.

Тъй като за $x\in(-\infty;-2)$ $f(x)$ е намаляваща, а за $x\in(-2;2)$ $f(x)$ е растяща, то за $x=-2$ $f(x)$ има локален минимум и $f_{\min}(x)=f(-2)=-\dfrac{1}{4}$.

Тъй като за $x\in(-2;2)$ $f(x)$ е растяща, а за $x\in(2;+\infty)$ $f(x)$ е намаляваща, то за $x=2$ $f(x)$ има локален максимум и $f_{\max}(x)=f(2)=\dfrac{1}{4}$.

б) Тъй като точките, в които функцията $f(x)$ има локални екстремуми, принадлежат на интервала $[-3;5]$ и $f(-3)=-\dfrac{3}{13}$, $f(5)=\dfrac{5}{29}$, то се получава, че:

НМС $f(x)=\min\limits_{x\in[-3;5]}\left\{f(-3), f(-2), f(5)\right\}=f(-2)=-\dfrac{1}{4}$ и

НГС $f(x)=\max\limits_{x\in[-3;5]}\left\{f(-3), f(2), f(5)\right\}=f(2)=\dfrac{1}{4}$

в) $f''(x)=\dfrac{-2x\left(x^2+4\right)^2-4x\left(x^2+4\right)\left(-x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)^4}=\dfrac{2x\left(x^2-12\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x\left(x^2-12\right)=0$ т.е. $x_1=0$ и $x_{2/3}=\pm 2\sqrt{3}$

За $x\in\left(-2\sqrt{3};0\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$: $f''(x)>0$, т.е. $f(x)$ е изпъкнала.

За $x\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(0;2\sqrt{3}\right)$: $f''(x)<0$, т.е. $f(x)$ е вдлъбната.

Инфлексните точки са $M_1\left(-2\sqrt{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $M_2(0;0)$ и $M_3\left(2\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $f(x)$ е растяща за $x\in(-2;2)$ $f(x)$ е намаляваща за $x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$	3,5 точки
$f_{\min}(x)=f(-2)=-\dfrac{1}{4}$, $f_{\max}(x)=f(2)=\dfrac{1}{4}$	4 точки
б) НМС: $f(-2)=-\dfrac{1}{4}$, НГС: $f(2)=\dfrac{1}{4}$	3 точки
в) $f(x)$ е изпъкнала за $x\in\left(-2\sqrt{3};0\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$ $f(x)$ е вдлъбната за $x\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(0;2\sqrt{3}\right)$	3,5 точки
Инфлексни точки: $M_1\left(-2\sqrt{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $M_2(0;0)$ и $M_3\left(2\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$.	1 точка

Задача 18.

Решение:

а) Равнината $\gamma \parallel CB$, $CB \subset (BCD)$ $\Rightarrow$ γ пресича равнината (BCD) в права, успоредна на CB $\Rightarrow$ $MN \parallel CB$.

Полученото сечение е $\triangle AMN$.

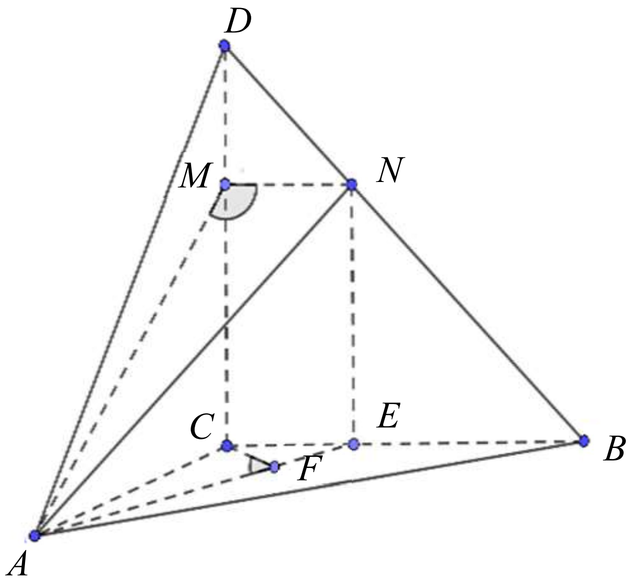
$AC \perp CB$, AC е ортогоналната проекция на AM върху равнината на основата и от теоремата за трите перпендикуляра следва, че: $AM \perp CB$ $\Rightarrow$ $AM \perp MN$ $\Rightarrow$ $\triangle AMN$ е правоъгълен.

От $DM : MC = 1:3$ $\Rightarrow$ $DM = 1$ cm, $MC = 3$ cm

От $\triangle DMN \sim \triangle DCB$ $\Rightarrow$ $MN = 1$ cm

От Питагорова теорема за $\triangle ACM$ $\Rightarrow$ $AM^2 = AC^2 + MC^2$ $\Rightarrow$ $AM = \sqrt{17}$ cm

$$S_{\triangle AMN} = \frac{\sqrt{17}}{2} \text{ cm}^2$$



б) Нека точка E е ортогоналната проекция на точка N върху равнината на основата $(E \in CB)$.

AE е ортогоналната проекция на AN в (ABC).

Нека $CF \perp AE$ $(F \in AE)$.

От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $CF \perp AN$.

$DC \perp (ABC)$ $\Rightarrow$ $DC \perp CF$ $\Rightarrow$ търсеното разстояние е CF.

CF е височина в правоъгълния $\triangle ACE$.

$MNEC$ е правоъгълник $\Rightarrow$ $CE = MN = 1$ cm

От Питагорова теорема за $\triangle ACE$ $\Rightarrow$ $AE^2 = AC^2 + CE^2$ $\Rightarrow$ $AE = 3$ cm

От метрични зависимости в правоъгълен триъгълник следва, че $CF.AE = AC.CE$ $\Rightarrow$

$$CF = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ cm}$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $\triangle AMN$ е правоъгълен.	5 точки
$S_{\triangle AMN} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}\ \text{cm}^2$	4 точки
б) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}$	6 точки