МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23 август 2024 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1.	А	3
2.	В	3
3.	Б	3
4.	Г	3
5.	Б	3
6.	Г	4
7.	В	4
8.	А	4
9.	Б	4
10.	В	4
11.	В	4
12.	А	4
13.	А	4
14.	В	4
15.	В	4
16.	а) $C(7;11)$, $D(-1;5)$, $P=20+10\sqrt{2}$ б) $H(2;1)$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $S=50$ в) $S_{тяло}=50\pi\left(2+\sqrt{2}\right)$, $V_{тяло}=250\pi$	15
17.	а) – б) $\frac{2}{3}$	15

18.	а) $V = 16\ \text{cm}^3$ б) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$	15

Задача 16.

Решение:

а) $C(a;b): \left|\begin{array}{l} \dfrac{a-2}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{b-2}{2} = \dfrac{9}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = 7 \\ b = 11 \end{array}\right. \Rightarrow C(7;11)$.

$D(c;d): \left|\begin{array}{l} \dfrac{c+6}{2} = \dfrac{5}{2} \\ \dfrac{d+4}{2} = \dfrac{9}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} c = -1 \\ d = 5 \end{array}\right. \Rightarrow D(-1;5)$.

$AB = \sqrt{(6+2)^2 + (4+2)^2} = 10$ и $AD = \sqrt{(-1+2)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

$P = 2.10 + 2.5\sqrt{2} = 20 + 10\sqrt{2}$

б) $AB: \dfrac{x+2}{6+2} = \dfrac{y+2}{4+2} \Rightarrow AB: 3x - 4y - 2 = 0$.

Нека точката има координати $H(x;y)$.

Тогава $\overrightarrow{DH}(x+1; y-5)$ и $\overrightarrow{AB}(8;6)$.

От $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow 8x + 8 + 6y - 30 = 0$.

$H = DH \cap AB \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 4x + 3y = 11 \\ 3x - 4y = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right. \Rightarrow H(2;1)$

За височината се получава: $h = \left|\dfrac{3.(-1) - 4.5 - 2}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \dfrac{25}{5} = 5 \Rightarrow S = AB.h = 10.5 = 50$

От $\overrightarrow{AB}(8;6)$ и $\overrightarrow{AD}(1;7)$ се получава $\cos\alpha = \dfrac{1.8 + 6.7}{\sqrt{8^2 + 6^2}\sqrt{1^2 + 7^2}} = \dfrac{50}{10.5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

в) $AH = \sqrt{(2+2)^2 + (1+2)^2} = 5 = h_1 = h_2$

$S_{тяло} = S_{цилиндър} + 2S_{конус} = 2.\pi.5.10 + 2.\pi.5.5\sqrt{2} = 100\pi + 50\pi\sqrt{2} = 50\pi\left(2 + \sqrt{2}\right)$

$V_{тяло} = V_{конус1} + V_{цилиндър} - V_{конус2}$, където $V_{конус1} = V_{конус2}$

Следователно $V_{тяло} = V_{цилиндър} = \pi .5^2.10 = 250\pi$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $C(7;11)$, $D(-1;5)$, $P = 20+10\sqrt{2}$	5 точки
б) $H(2;1)$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $S = 50$	7 точки
в) $S_{тяло} = 50\pi\left(2+\sqrt{2}\right)$, $V_{тяло} = 250\pi$	3 точки

Задача 17.

Решение:

а)

1) При $n=1$, $\frac{1}{a_1a_2} = \frac{1}{a_1\left(a_1+d\right)}$, следователно равенството е вярно за $n=1$.

2) Нека при $n=k$ е в сила: $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\dots+\frac{1}{a_ka_{k+1}} = \frac{k}{a_1\left(a_1+kd\right)}$.

3) Ще докажем, че равенството е вярно за $n=k+1$.

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\dots+\frac{1}{a_ka_{k+1}}+\frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}} =$$

$$= \frac{k}{a_1\left(a_1+kd\right)}+\frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}} = \frac{k}{a_1\left(a_1+kd\right)}+\frac{1}{\left(a_1+kd\right)\left(a_1+\left(k+1\right)d\right)} =$$

$$= \frac{1}{\left(a_1+kd\right)}\left(\frac{k}{a_1}+\frac{1}{\left(a_1+\left(k+1\right)d\right)}\right) = \frac{1}{\left(a_1+kd\right)}\left(\frac{ka_1+k\left(k+1\right)d+a_1}{a_1\left(a_1+\left(k+1\right)d\right)}\right) =$$

$$= \frac{\left(k+1\right)\left(a_1+kd\right)}{\left(a_1+kd\right)a_1\left(a_1+\left(k+1\right)d\right)} = \frac{\left(k+1\right)}{a_1\left(a_1+\left(k+1\right)d\right)}$$

Следователно равенството е вярно за всяко естествено число *n*.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\dots+\frac{1}{a_na_{n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a_1\left(a_1+nd\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a_1\left(a_1+nd\right)} =$

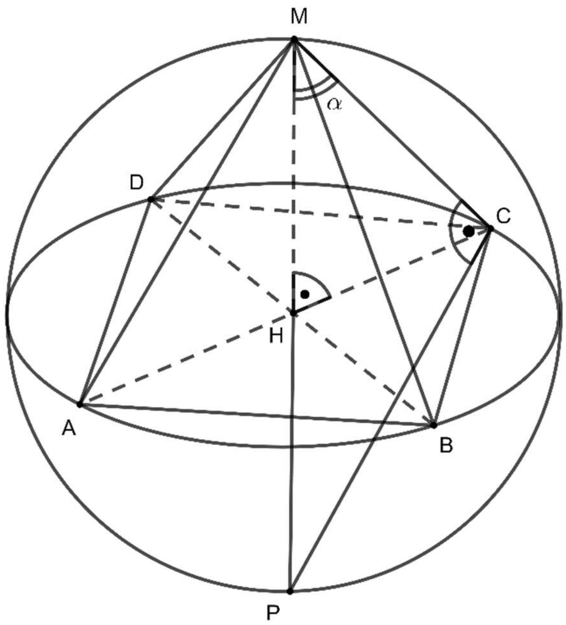
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+3n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(\frac{1}{4n}+\frac{3}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) –	10 точки
б) $\dfrac{2}{3}$	5 точки

Задача 18.

Решение:



а) Тъй като пирамидата е правилна, то основата ѝ $ABCD$ е квадрат и ортогоналната проекция на върха M на пирамидата в основата е точка $H = AC \cap BD$.

$\sphericalangle AMC = 2\alpha = 120^\circ \Rightarrow \sphericalangle HMC = \sphericalangle HMA = 60^\circ$.

Тъй като пирамидата е правилна, то центърът на описаната около пирамидата сфера, точка O, лежи на височината на пирамидата MH.

От $MO = CO$ и $\sphericalangle OMC = 60^\circ \Rightarrow \triangle MOC$ е равностранен.

Следователно $MC = OC = OM = 4\ cm$ и тъй като в правоъгълния $\triangle MHC$ $\sphericalangle MCH = 30^\circ$, то $MH = 2\ cm$.

От Питагорова теорема за $\triangle MCH$ се намира, че $CH = 2\sqrt{3}$ cm, т.е. $AC = BD = 4\sqrt{3}$ cm.

Следователно $S_{ABCD} = \dfrac{\left(4\sqrt{3}\right)^2}{2} = 24\ \text{cm}^2$.

Така за обема на пирамидата се получава, че $V = \dfrac{1}{3}.24.2 = 16\ \text{cm}^3$.

б) Нека правата на височината MH на пирамидата пресича за втори път сферата в точка P. Тогава $MP = 8$ cm и $\sphericalangle MCP = 90^\circ$.

От метрични зависимости в правоъгълния $\triangle MCP$ се получава, че $MC^2 = 8.MH$, но $MC = 8\cos\alpha \Rightarrow MH = 8\cos^2\alpha$.

От Питагорова теорема за $\triangle MCH$ се намира, че $CH = 8\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, т.е. $AC = BD = 16\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

Следователно $S_{ABCD} = 128\cos^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)$, т.е. за обема на пирамидата се получава, че $V = \dfrac{1024}{3}\cos^4\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)$.

Нека $\cos^2\alpha = t$. Тъй като $\alpha \in \left(0^\circ; 90^\circ\right)$, то $t \in (0;1)$.

Тогава обемът на пирамидата е най-голям, когато функцията $f(t) = -t^3 + t^2$ има най-голяма стойност при $t \in (0;1)$.

$f'(t) = -3t^2 + 2t$

$f'(t) = 0$ при $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{2}{3}$.

Функцията $f(t)$ расте при $t \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$ и намалява при $t \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$.

Следователно обемът на пирамидата е най-голям при $\cos^2 \alpha = \frac{2}{3}$, но $\alpha \in \left(0^\circ; 90^\circ\right)$, т.е. при $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $V = \frac{1}{3}.24.2 = 16\text{ cm}^3$	7 точки
б) $V = \frac{1024}{3}\cos^4 \alpha \left(1 - \cos^2 \alpha\right)$	4 точки
$\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$	4 точки