МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23 май 2023 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

Ключ с верните отговори

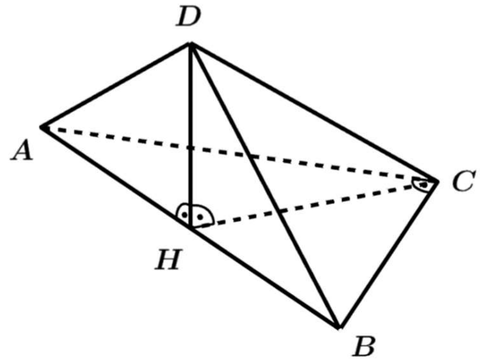
№	Отговор	Брой точки
1.	В	3
2.	А	3
3.	Г	3
4.	В	3
5.	А	3
6.	В	4
7.	В	4
8.	В	4
9.	Б	4
10.	А	4
11.	Б	4
12.	В	4
13.	Г	4
14.	А	4
15.	Б	4
16.	$V=1\text{ cm}^3$, $AC=\sqrt{6}\text{ cm}$ и $AB=\sqrt{10}\text{ cm}$	15
17.	а) $a=\frac{1}{3}$, $b=-6$ и $c=3$ б) $T(1;2)$ и $t: y=-x+3$	15
18.	а) $B(-1;-1)$ и $C(-10;5)$	15

	б) $P\left(\frac{1}{2};11\right)$ и $R=\frac{3}{2}\sqrt{65}$	

Задача 16.

Решение:

От равните околни ръбове следва, че върхът D се проектира ортогонално върху равнината на основата в центъра на описаната окръжност за $\triangle ABC$. От перпендикулярността се получава, че върхът D се проектира върху пресечницата AB. Оттук се получава, че $\triangle ABC$ е правоъгълен с хипотенуза AB.



Нека $AB=2x \Rightarrow CH=\frac{1}{2}AB=x$, като медиана в правоъгълен триъгълник. От правоъгълните триъгълници $\triangle ABC$ и $\triangle CHD$ се получават ограниченията $\left|\begin{array}{l} AB>BC \\ CD>CH \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x>1 \\ x<2 \end{array}\right.$.

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=2\sqrt{x^2-1}\text{ cm}$$

$$DH=\sqrt{CD^2-x^2}=\sqrt{4-x^2}\text{ cm}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{AC.BC}{2}=2\sqrt{x^2-1}\text{ cm}^2$$

$$V=\frac{1}{3}.2\sqrt{x^2-1}.\sqrt{4-x^2} \Rightarrow V=\frac{2}{3}\sqrt{\left(x^2-1\right)\left(4-x^2\right)}\text{ cm}^3$$

Тъй като функцията $g(t)=\sqrt{t},\ t\geq 0$ е монотонно растяща, може да разглеждаме $f(x)=\left(x^2-1\right)\left(4-x^2\right)$ и най-голямата стойност на $f(x)$ и V ще се достига за една и съща стойност на x.

$$f(x)=-x^4+5x^2-4$$

$$f'(x)=-4x^3+10x=x\left(\sqrt{10}-2x\right)\left(\sqrt{10}+2x\right)$$

$f(x)$ расте за $x\in\left(1;\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ и намалява за $x\in\left(\frac{\sqrt{10}}{2};2\right)$.

Най-голямата стойност се достига при $x = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\Rightarrow AC = \sqrt{6}$ cm, $AB = \sqrt{10}$ cm, $DH = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ cm.

$$V_{\max} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}.2}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = 1 \text{ cm}^3$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

$\triangle ABC$ е правоъгълен	2 точки
Въвеждане на неизвестно и определяне на интервала му на изменение	2 точки
Изразяване на обема чрез въведеното неизвестно	5 точки
Изследване на функция и намиране на НГС	3 точки
$V = 1 \text{ cm}^3$, $AC = \sqrt{6}$ cm и $AB = \sqrt{10}$ cm	3 точки

Задача 17.

Решение:

а)

$$3x^5 - 4x^4 - 11x^3 - 11x^2 - 4x + 3 = 0$$

Уравнението е реципрочно от нечетна степен и $x = -1$ е корен на уравнението.

	3	–4	–11	–11	–4	3
–1	3	–7	–4	–7	3	0

$$3x^4 - 7x^3 - 4x^2 - 7x + 3 = 0 : x^2 \neq 0$$

$$3x^2 - 7x - 4 - \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2} = 0$$

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0$$

Полагане $x + \dfrac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Следователно се получава уравнението

$3t^2 - 6 - 7t - 4 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 7t - 10 = 0$ с корени $t_1 = \dfrac{10}{3}$ и $t_2 = -1$.

За $t_1=\frac{10}{3}$ се получава $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2-10x+3=0$ с корени $x_1=\frac{1}{3}$ и $x_2=3$.

За $t_2=-1$ се получава $x+\frac{1}{x}=-1 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$ с $D=-3<0$ т.е. н.р.к $\Rightarrow$ $a=\frac{1}{3}$.

Забележка: Уравнението може да бъде решено и по схемата на Хорнер.

$$b=4,(7)-10\frac{7}{9}=4+\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+...-10\frac{7}{9}.$$

Редицата $\frac{7}{10};\frac{7}{100};\frac{7}{1000};...$ е безкрайно намаляваща геометрична прогресия с първи член $\frac{7}{10}$, частно $\frac{1}{10}<1$ и сума $\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+...=\frac{\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{7}{9}$.

Следователно $b=4+\frac{7}{9}-10\frac{7}{9}=-6$ т.е. $b=-6$.

$$c=\lim_{x\to 7}\frac{\sin(x-7)}{\sqrt{2x-5}-3}=\lim_{x\to 7}\frac{\sin(x-7)\left(\sqrt{2x-5}+3\right)}{\left(\sqrt{2x-5}-3\right)\left(\sqrt{2x-5}+3\right)}$$

$$c=\lim_{x\to 7}\frac{\sin(x-7)\left(\sqrt{2x-5}+3\right)}{2x-5-9}=\lim_{x\to 7}\frac{\sin(x-7)\left(\sqrt{2x-5}+3\right)}{2(x-7)}=\frac{1}{2}.6=3 \text{ т.е. } c=3.$$

б) $f(x)=3x^2-7x+6$

$f'(x)=6x-7=\operatorname{tg}135^\circ=-1 \Rightarrow 6x-7=-1 \Rightarrow x=1$

Тогава $f(1)=2$ и координатите на допирната точка са $T(1;2)$.

Уравнението на допирателната в точката T е $t:y=-x+d$ и тъй като $2=-1+d$, то $t:y=-x+3$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $a=\frac{1}{3}$, $b=-6$ и $c=3$	12 точки
б) $T(1;2)$ и $t:y=-x+3$	3 точки

Задача 18.

Решение:

а) Тъй като височината и медианата са през върха B, то координатите на точката B са решение на системата: $\begin{vmatrix} 2x-y+1=0 \\ x+y+2=0 \end{vmatrix}$

Чрез събиране се получава системата $\begin{vmatrix} 3x+3=0 \\ x+y+2=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x=-1 \\ x+y+2=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x=-1 \\ y=-1 \end{vmatrix}$

Следователно координатите на върха B са $(-1;-1)$.

За да се намерят координатите на върха C, трябва да се намерят уравнението на правата AC и координатите на пресечната точка на медианата m и правата AC.

$AC \perp h \Rightarrow AC: x+2y+k=0$

$A \in AC \Rightarrow k=0$ т.е. $AC: x+2y=0$

$AC \cap m = M \Rightarrow \begin{vmatrix} x+2y=0 \\ x+y+2=0 \end{vmatrix}$

Чрез изваждане се получава системата $\begin{vmatrix} y-2=0 \\ x+2y=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y=2 \\ x+2y=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x=-4 \\ y=2 \end{vmatrix}$

Следователно координатите на M са $(-4;2)$.

Тъй като M е среда на страната AC, то координатите на върха C са решение на системата $\begin{vmatrix} \dfrac{2+x_C}{2}=-4 \\ \dfrac{-1+y_C}{2}=2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2+x_C=-8 \\ -1+y_C=4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_C=-10 \\ y_C=5 \end{vmatrix}$.

Следователно координатите на върха C са $(-10;5)$.

б) Ако центърът, точка P, има координати $(\alpha;\beta)$, то окръжността има уравнение: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

Тъй като върховете A, B и C са от окръжността, то се получава системата:

$$\begin{vmatrix} (2-\alpha)^2+(-1-\beta)^2=R^2 \\ (-1-\alpha)^2+(-1-\beta)^2=R^2 \\ (-10-\alpha)^2+(5-\beta)^2=R^2 \end{vmatrix} \text{ т.е. } \begin{vmatrix} (2-\alpha)^2+(1+\beta)^2=R^2 \\ (1+\alpha)^2+(1+\beta)^2=R^2 \\ (10+\alpha)^2+(5-\beta)^2=R^2 \end{vmatrix}$$

След изваждане на първите две уравнения се получава уравнението

$$(2-\alpha)^2-(1+\alpha)^2=0 \Leftrightarrow 6\alpha=-3 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

Следователно $\left|\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^2+(1+\beta)^2=R^2\\ \left(10\frac{1}{2}\right)^2+(5-\beta)^2=R^2\end{array}\right.$

Изваждат се двете уравнения и се получава:

$$\frac{441}{4}+(5-\beta)^2=\frac{9}{4}+(1+\beta)^2 \Leftrightarrow 12\beta=132 \Leftrightarrow \beta=11$$

Следователно координатите на центъра P са $\left(\frac{1}{2};11\right)$.

Получената стойност за $\beta=11$ се замества в едно от уравненията $\left|\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^2+(1+\beta)^2=R^2\\ \left(10\frac{1}{2}\right)^2+(5-\beta)^2=R^2\end{array}\right.$ т.е. $R^2=\frac{585}{4} \Rightarrow R=\frac{3}{2}\sqrt{65}$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $B(-1;-1)$	2 точки
$C(-10;5)$	6 точки
б) $P\left(\frac{1}{2};11\right)$ и $R=\frac{3}{2}\sqrt{65}$	7 точки