МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

25 август 2023 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

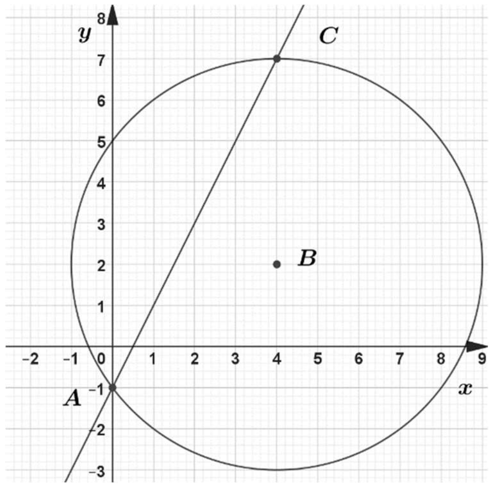
Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1.	Б	3
2.	В	3
3.	А	3
4.	В	3
5.	В	3
6.	Б	4
7.	В	4
8.	Г	4
9.	Г	4
10.	А	4
11.	В	4
12.	А	4
13.	А	4
14.	Б	4
15.	А	4
16.	а) $A(0;-1)$, $C(4;7)$ и $D(0;4)$ б) $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}=15$, $\measuredangle DMC=45^\circ$	15
17.	а) $a=\frac{3}{4}$, $b=-12$, $c=8$ и $d=-8$ б) $x\in\left(5-\sqrt{29};2\right)\cup\left(5+\sqrt{29};+\infty\right)$ в) само a е решение	15

18.	а) $V(h)=\frac{4\sqrt{2}}{9}(36-h^2)h$, $h\in(0;6)$ б) $V=\frac{64\sqrt{6}}{3}$ cm^3 при $h=2\sqrt{3}$ cm	15

Задача 16.

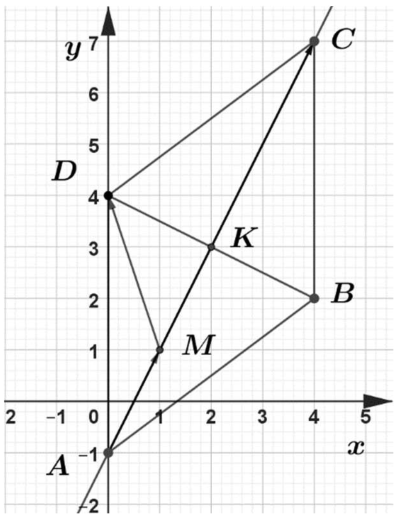
Решение:



а) Точки A и C може да се разглеждат като пресечни точки на правата AC и окръжност с център точка B и радиус 5. Окръжността е с уравнение $(x-4)^2+(y-2)^2=25$. За получаване на координатите на пресечните точки се решава системата $\begin{vmatrix}(x-4)^2+(y-2)^2=25\\ y=2x-1\end{vmatrix}$ чрез заместване $\begin{vmatrix}(x-4)^2+(2x-1-2)^2=25\\ y=2x-1\end{vmatrix}$.

$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}(x-4)^2+(2x-3)^2=25\\ y=2x-1\end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x^2-4x=0\\ y=2x-1\end{vmatrix}$. За решение се получават двете наредени двойки $(x;y)$, съответно $(0;-1)$ и $(4;7)$. Следователно координатите са съответно $A(0;-1)$ и $C(4;7)$. Определянето на координатите на точка D следва от това, че AC и BD имат обща среда точка K. От средата на $AC\Rightarrow$ $K\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2}\right)\Rightarrow K(2;3)$. От средата на $BD\Rightarrow$ $K\left(\frac{x_D+4}{2};\frac{y_D+2}{2}\right)\Rightarrow D(0;4)$.



б) Определяне на координатите на векторите

$\overrightarrow{AC}(x_C-x_A;y_C-y_A)\Rightarrow\overrightarrow{AC}(4;8)$

$\overrightarrow{AM}(x_M-0;y_M+1)$, но $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AM}(1;2)$

$\Rightarrow M(1;1)$

$\overrightarrow{MD}(-1;3)$, $\overrightarrow{MC}(3;6)$

$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}=x_{\overrightarrow{MD}}x_{\overrightarrow{MC}}+y_{\overrightarrow{MD}}y_{\overrightarrow{MC}}\Rightarrow\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}=15$

$\left|\overrightarrow{MD}\right| = \sqrt{x_{\overrightarrow{MD}}^2 + y_{\overrightarrow{MD}}^2} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MD}\right| = \sqrt{10}$, аналогично

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MC}\right| = 3\sqrt{5}$

$$\cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}\right) = \frac{\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}}{\left|\overrightarrow{MD}\right|.\left|\overrightarrow{MC}\right|}$$

$$\cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}\right) = \frac{15}{3\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sphericalangle DMC = 45^\circ$$

II начин

Пресмятане на дължините на отсечките $AC = 4\sqrt{5}$, $BD = 2\sqrt{5}$, $MK = \frac{1}{4}AC = \sqrt{5}$, $DK = \frac{1}{2}BD = \sqrt{5}$, следователно $\triangle KMD$ е равнобедрен и правоъгълен $\Rightarrow \sphericalangle DMC = 45^\circ$.

Пресмятане на дължините $\left|\overrightarrow{MD}\right| = \sqrt{10}$ и $\left|\overrightarrow{MC}\right| = 3\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC} = \left|\overrightarrow{MD}\right|.\left|\overrightarrow{MC}\right|\cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC} = 3\sqrt{5}.\sqrt{10}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 15 .$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $A(0;-1)$, $C(4;7)$ и $D(0;4)$	8 точки
б) $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC} = 15$, $\sphericalangle DMC = 45^\circ$	7 точки

Задача 17.

Решение:

а) $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{6x^2 - 5x + 4}{8x^2 + 2x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2\left(6 - \dfrac{5}{x} - \dfrac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(8 + \dfrac{2}{x}\right)} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

$$b = \lim_{x\to 2} \frac{12 - 6x}{2\left(\sqrt{x+2} - 2\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{6(2-x)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{2\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{3(2-x)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x+2-4} =$$

$$= \lim_{x\to 2} -\frac{3\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\cancel{x-2}} = -3.4 = -12$$

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x.\frac{x}{2}.2x}{\sin\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cancel{x}}{\frac{\cancel{x}}{2}}=8$$

$$d=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 4x-4}{4x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\left(1-\cos 4x\right)}{4x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-4.2.\sin^2 2x}{4x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-4.2.\sin^2 2x.2x.2x}{4x\sin x.2x.2x}=-8$$

б) $\frac{3}{4}x^3-9x^2+12x+6>0$

$x^3-12x^2+16x+8>0$

Намиране делителите на свободния член – $\pm 1;\pm 2;\pm 4;\pm 8$. Тъй като старшият коефициент е 1, то ако полиномът $x^3-12x^2+16x+8$ има нули, които са рационални числа, те ще са измежду числата $\pm 1;\pm 2;\pm 4;\pm 8$.

Прилагане схемата на Хорнер и получаване, че $x=2$ е нула на полинома.

Тогава неравенството има вида: $\left(x-2\right)\left(x^2-10x-4\right)>0$

Търсят се реалните корени на уравнението $x^2-10x-4=0$.

$D=116$ и следователно $x_{2,3}=\frac{10\pm\sqrt{116}}{2}=5\pm\sqrt{29}$.

$\left(x-2\right)\left(x-5-\sqrt{29}\right)\left(x-5+\sqrt{29}\right)>0$

$x\in\left(5-\sqrt{29};2\right)\cup\left(5+\sqrt{29};+\infty\right)$

в) Единственото число измежду числата a, b, c и d, което е решение на неравенството, е a, т.к. $a=\frac{3}{4}$ и $5-\sqrt{29}<\frac{3}{4}<2$.

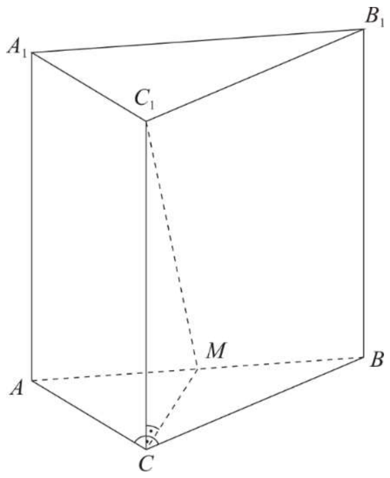
Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $a=\frac{3}{4}$, $b=-12$, $c=8$ и $d=-8$	7 точки
б) $\left(x-2\right)\left(x^2-10x-4\right)>0$	3 точки
$\left(x-2\right)\left(x-5-\sqrt{29}\right)\left(x-5+\sqrt{29}\right)>0$ $x\in\left(5-\sqrt{29};2\right)\cup\left(5+\sqrt{29};+\infty\right)$	3 точки
в) доказателство, че само $a=\frac{3}{4}$ е решение	2 точки

Задача 18.

Решение:

а) Нека $AB = c$.



$\triangle ABC$ – правоъгълен $\Rightarrow \sin\measuredangle ABC = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{3}$.

Получава се $AC = \dfrac{c}{3}$ cm и

$\cos\measuredangle ABC = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\cos\measuredangle ABC = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow BC = \dfrac{2\sqrt{2}c}{3}$.

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{AC.BC}{2} = \dfrac{c.2\sqrt{2}c}{18} = \dfrac{\sqrt{2}c^2}{9}$ cm^2.

$\triangle CMC_1$ – правоъгълен, $\measuredangle C_1CM = 90°$, $CC_1 = h$, $C_1M = 6$ cm и $CM = \dfrac{c}{2}$ cm (CM медиана към хипотенузата в правоъгълния триъгълник $\triangle ABC$).

Следователно $CM^2 = C_1M^2 - C_1C^2$ (Питагорова теорема)

$\left(\dfrac{c}{2}\right)^2 = 6^2 - h^2 \qquad c^2 = 4\left(36 - h^2\right)$

$CC_1 = h$ е катет в правоъгълния $\triangle CMC_1$ с хипотенуза $C_1M = 6$ cm.

Следователно $h \in (0;6)$.

За обема на призмата $ABCA_1B_1C_1$ се получава:

$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC}.h = \dfrac{\sqrt{2}c^2}{9}h = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}\left(36-h^2\right)h$ cm^3,

т.е. $V = V(h) = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}\left(36-h^2\right)h$, $h \in (0;6)$.

б) Обемът на призмата $ABCA_1B_1C_1$ е най-голям, когато функцията

$V(h)=\frac{4\sqrt{2}}{9}\left(36-h^2\right)h$ приема най-голяма стойност в интервала $(0;6)$.

Намира се $V'(h)=\left[\frac{4\sqrt{2}}{9}\left(36-h^2\right)h\right]'=\frac{4\sqrt{2}}{9}\left(36h-h^3\right)'=\frac{4\sqrt{2}}{9}\left(36-3h^2\right)$.

$V(h)$ е растяща за $h\in\left(0;2\sqrt{3}\right)$ и намаляваща за $h\in\left(2\sqrt{3};6\right)$.

Най-голямата стойност се достига при $h=2\sqrt{3}$ cm.

$V_{\max}=\frac{4\sqrt{2}}{9}\left[36-\left(2\sqrt{3}\right)^2\right].2\sqrt{3}=\frac{64\sqrt{6}}{3}\ \text{cm}^3$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Намиране лицето на основата на призмата	4 точки
Намиране, че $h\in(0;6)$	3 точки
$V(h)=\frac{4\sqrt{2}}{9}\left(36-h^2\right)h$	2 точки
б) Изследване на функция и намиране на НГС	3 точки
$V=\frac{64\sqrt{6}}{3}\ \text{cm}^3$ при $h=2\sqrt{3}$ cm	3 точки