МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

26 май 2022 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1.	В	3
2.	В	3
3.	Г	3
4.	В	3
5.	Б	3
6.	Б	4
7.	В	4
8.	Г	4
9.	Г	4
10.	Б	4
11.	Б	4
12.	А	4
13.	Г	4
14.	А	4
15.	В	4
16.		15
17.	а) $C\ (1;\ 7)$ и $A\ (-2;\ -2)$ б) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 60$ $\sphericalangle BCA = 45^\circ$	15
18.		15

Задача 16.

Решение:

Доказване на равенството по индукция.

За $n = 2$ твърдението е вярно.

Нека е вярно за някое $n \geq 2$. Ще го докажем за $n + 1$. Последователно се преобразува:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{2}\frac{(n+1)+1}{n+1}.$$

Следователно твърдението е вярно и за $n + 1$. С това индукционната стъпка е завършена. Следователно твърдението е вярно за всяко $n \geq 2$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

База на индукцията	2 точки
Индукционна стъпка	12 точки
Краен извод	1 точка

II решение

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=($$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right).\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}$$

Разлагане	2 точки
Прегрупиране и пълно съкращаване	12 точки
Краен извод	1 точка

Задача 17.

Решение:

а) Окръжността има уравнение $(x-1)^2+(y-2)^2=R^2$. Точка B е от окръжността и се замества с нейните координати $(5-1)^2+(-1-2)^2=R^2 \Rightarrow R=5$

$(x-1)^2+(y-2)^2=25$. За получаване на координатите на пресечните точки се решава системата $\begin{vmatrix}(x-1)^2+(y-2)^2=25\\ y=3x+4\end{vmatrix}$ чрез заместване. $\begin{vmatrix}(x-1)^2+(3x+4-2)^2=25\\ y=3x+4\end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}(x-1)^2+(3x+2)^2=25\\ y=3x+4\end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x^2+x-2=0\\ y=3x+4\end{vmatrix}$. За решение се получават двете наредени двойки (x; y), съответно (1; 7) и (–2; –2).

Тъй като точка C лежи в първи квадрант, координатите са съответно C (1; 7) и A (–2; –2)

б) I начин

$$\overrightarrow{CA}\left(x_A-x_C;y_A-y_C\right)\Rightarrow\overrightarrow{CA}(-3;-9)$$

$$\overrightarrow{CB}\left(x_B-x_C;y_B-y_C\right)\Rightarrow\overrightarrow{CB}(4;-8)$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=x_{\overrightarrow{CA}}x_{\overrightarrow{CB}}+y_{\overrightarrow{CA}}y_{\overrightarrow{CB}}\Rightarrow\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=60$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{x_{\overrightarrow{CA}}^2+y_{\overrightarrow{CA}}^2}\Rightarrow\left|\overrightarrow{CA}\right|=3\sqrt{10}$$

$$\left|\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{x_{\overrightarrow{CB}}^2+y_{\overrightarrow{CB}}^2}\Rightarrow\left|\overrightarrow{CB}\right|=4\sqrt{5}$$

$$\cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|}$$

$$\cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right)=\frac{60}{3\sqrt{10}.4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad\Rightarrow\sphericalangle\left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right)=45^\circ$$

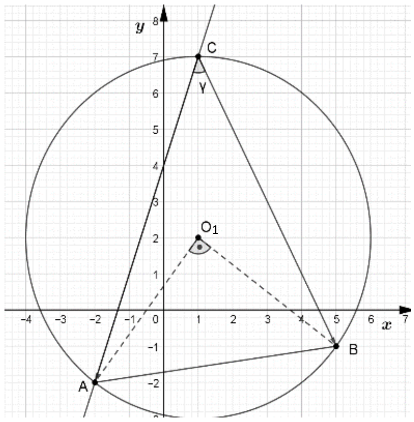
II начин

$$AC=\sqrt{\left(x_A-x_C\right)^2+\left(y_A-y_C\right)^2}\Rightarrow AC=3\sqrt{10}$$

$$BC=\sqrt{\left(x_B-x_C\right)^2+\left(y_B-y_C\right)^2}\Rightarrow BC=4\sqrt{5}$$

$BA = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2} \Rightarrow BA = 5\sqrt{2}$.

Начин II. 1



От обратната теорема на Питагор се получава, че ΔAO_1B е правоъгълен, където точка O_1 е център на окръжността.

От връзката между вписан и централен ъгъл

$$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AO_1B = 45^\circ$$

Начин II. 2

От косинусова теорема $\cos\sphericalangle ACB = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB}{2AC.BC}$

$$\cos\sphericalangle ACB = \frac{90+80-50}{2.3\sqrt{10}.4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sphericalangle ACB = 45^\circ$$

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\sphericalangle\left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right) = 3\sqrt{10}.4\sqrt{5}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 60$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Определяне на R	1 точка
Съставяне и вярно решаване на подходяща система	5 точки
Определяне на координатите на A и C (вкл. уточняване на точките)	2 точки
б) **I начин** Пресмятане на скаларното произведение	3 точки
Пресмятане на косинус	3 точки
Намиране на ъгъла	1 точка
II начин Намиране на трите страни	3 точки
Доказване, че $\sphericalangle AOB = 90^\circ$ или записване на косинусова теорема	2 точки
Намиране на ъгъла	1 точка
Пресмятане на скаларното произведение	1 точка

Задача 18.

Решение:

Дефиниционното множество на функцията $f(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$ е $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Функцията не е нито четна, нито нечетна $\left(f(-x)\neq\pm f(x)\right)$, нито периодична.

Изследване на функцията към краищата на дефиниционната ѝ област:

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{2x+3}{1-x}=-\infty$, следователно правата $x=1$ е вертикална асимптота при $x\to1,\ x>1$;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+3}{1-x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{x}-1\right)}=-2$, следователно правата $y=-2$ е хоризонтална асимптота при $x\to\pm\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{2x+3}{1-x}=+\infty$, следователно правата $x=1$ е вертикална асимптота и при $x\to1,\ x<1$;

Пресмятане на производната $f'(x)=\dfrac{2(1-x)-(2x+3)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{5}{(1-x)^2}$.

Понеже $f'(x)=\dfrac{5}{(1-x)^2}>0,\ x\neq1$, то функцията $f(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$ е растяща във всеки интервал, в който е дефинирана.

Пресмятане на втората производна на $f(x)$ $f''(x)=\left(\dfrac{5}{(1-x)^2}\right)'=\dfrac{5\cdot(-2)\cdot(-1)}{(1-x)^3}=\dfrac{10}{(1-x)^3}$

Понеже $f''(x)=\dfrac{10}{(1-x)^3}>0,\ x<1$ и $f''(x)=\dfrac{10}{(1-x)^3}<0,\ x>1$, то функцията $f(x)$ е изпъкнала за $x<1$ и вдлъбната за $x>1$.

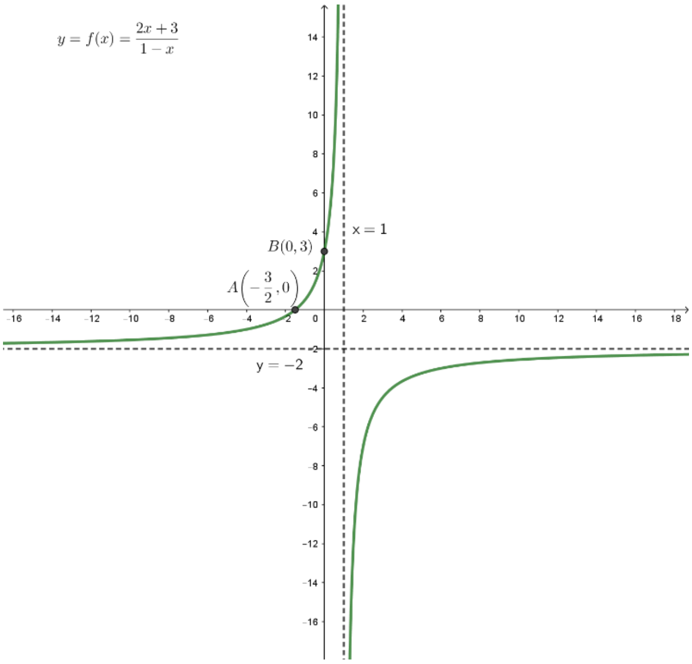
Намиране на пресечните точки с координатните оси. Оста Ox има уравнение $y=0$, следователно пресечната точка на $y=f(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$ и Ox има координати $\left(-\dfrac{3}{2};0\right)$

Оста Oy има уравнение $x=0$, следователно пресечната точка на $y=f(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$ и Oy има координати $(0;3)$.

Таблица:

x	$-\infty$ 1	∞
f	-2 $+\infty$ расте, изпъкнала	$-\infty$ -2 расте, вдлъбната
f'	$+$ $+$ $+$	$+$ $+$ $+$
f''	$+$ $+$ $+$	$-$ $-$ $-$

Графика на функцията.



Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

За намиране на ДМ $x \in (-\infty,1) \cup (1,\infty)$	2 точки
За изследване на функцията в краищата на интервалите на ДМ и определяне на асимптотите	6 точки
За определяне на интервалите на растене и намаляване	2 точки
За намиране на втората производна и определяне на изпъкналост и вдлъбнатост	2 точки
За систематизиране на информацията и построяване на графиката	3 точки