МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

26 май 2022 г.

ОБЩООБРАЗОВАТЕЛНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1.	В	2
2.	Б	2
3.	Г	2
4.	Г	2
5.	Б	2
6.	В	3
7.	Г	3
8.	Г	3
9.	Г	3
10.	Б	3
11.	Б	3
12.	Г	3
13.	В	3
14.	А	3
15.	Г	3
16.	Г	3
17.	Г	3
18.	А	3
19.	В	3
20.	В	3
21.	$a_1 = 70,\ d = -10$	15
22.	а) $x = k,\ k \in Z$ $S = \frac{1+100}{2}.100 = 5050.$ б) $x \in [-1; 1] \cup [14; 16]$ $x = -1,\ 0,\ 1,\ 14,\ 15,\ 16$	15
23.	а) $AB = CD = 13\ cm$ $AD = BC = 8\ cm$ б) $\cos \sphericalangle AMB = \frac{3\sqrt{3}}{14}$ в) $AH = \frac{52\sqrt{3}}{7}\ cm$	15

Задача 21.

Решение:

1. Означаваме $\div a_1, a_2, \ldots.$ и разлика d

$S_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2}.13 = 130 \Rightarrow a_1 + a_{13} = 20$

$\Rightarrow 2a_7 = a_4 + a_{10} \Rightarrow a_7 = 10$

2. $a_4,\ a_{10},\ a_7$ са последователни членове на геометрична прогресия $\Rightarrow a_{10}^2 = a_4.a_7$

3. Нека $a_{10} = x \Rightarrow a_4 = 20 - x$

Тогава след заместване в $a_{10}^2 = a_4.a_7$ $x^2 = 10(20 - x) \Rightarrow x^2 + 10x - 200 = 0$

се получава $x_1 = 10,\ x_2 = -20$

4. При $x_1 = 10 \Rightarrow a_{10} = 10$ и $a_7 = 10$

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_7 = a_1 + 6d = 10 \\ a_{10} = a_1 + 9d = 10 \end{array} \right. \Rightarrow a_1 = 10, d = 0$

Тъй като аритметичната прогресия е намаляваща, то $d < 0 \Rightarrow a_1 = 10,\ d = 0$ не е решение.

5. При $x_1 = -20 \Rightarrow a_{10} = -20$ и $a_7 = 10$

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} a_7 = a_1 + 6d = 10 \\ a_{10} = a_1 + 9d = -20 \end{array} \right. \Rightarrow a_1 = 70, d = -10$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

За съставена система с a_1 и d	5 точки
$a_1 = 10,\ d = 0$ и извод, че не е решение	5 точки
$a_1 = 70,\ d = -10$	5 точки

Задача 22.

Решение:

а) Преобразуване на $\sin^2 2\pi x - 2\cos 2\pi x + 2 = 0 \iff$

$\iff 1 - \cos^2 2\pi x - 2\cos 2\pi x + 2 = 0 \iff \cos^2 2\pi x + 2\cos 2\pi x - 3 = 0$ и след полагане на $t = \cos 2\pi x$, $t \in [-1; 1]$ се получава уравнението $t^2 + 2t - 3 = 0$ с корени $t_1 = 1$ и $t_2 = -3$, като решение е само $t = 1$.

От $\cos 2\pi x = 1$ се намира $2\pi x = 2k\pi$ и $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Първите 100 положителни корена са 1, 2, …, 100 и сборът им е $S = \dfrac{1+100}{2}.100 = 5050.$

б) $\left|x^2 - 15x - 1\right| \le 15 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2 - 15x - 1 \le 15 \\ x^2 - 15x - 1 \ge -15 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x^2 - 15x - 16 \le 0 \\ x^2 - 15x + 14 \ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} -1 \le x \le 16 \\ x \le 1 \cup x \ge 14 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-1;\, 1] \cup [14;\, 16].$

Решения на уравнението и на неравенството са числата $x = -1, 0, 1, 14, 15, 16$.

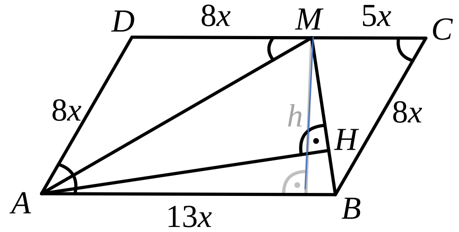
Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а)Представяне на $\sin^2 2\pi x = 1 - \cos^2 2\pi x$ и получаване на уравнението $\cos^2 2\pi x + 2\cos 2\pi x - 3 = 0$	2 точки
Полагане на $t = \cos 2\pi x$, получаване на уравнението $t^2 + 2t - 3 = 0$ и намиране на корените $t_1 = 1$ и $t_2 = -3$	3 точки
Решаване на уравнението $\cos 2\pi x = 1$	2 точки
Пресмятане на сбора на първите 100 положителни корена	2 точки
б)Представяне на $\left|x^2 - 15x - 1\right| \le 15$ като система $\left|\begin{array}{l} x^2 - 15x - 1 \le 15 \\ x^2 - 15x - 1 \ge -15 \end{array}\right.$	2 точки
Получаване на $-1 \le x \le 16$, $x \le 1 \cup x \ge 14$ и намиране на решенията $x \in [-1;\, 1] \cup [14;\, 16]$	3 точки
Направен извод за общите решения $\pm 1, 0, 14, 15, 16$ на тригонометричното уравнение и на неравенството	1 точка

Задача 23.

Решение:

а) Означаваме $DM = 8x$ и $MC = 5x$.



От $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAD$ (AM е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$) и $\sphericalangle BAM = \sphericalangle AMD$ (кръстни ъгли) следва, че $\sphericalangle AMD = \sphericalangle MAD$, $\triangle AMD$ е равнобедрен и $AD = DM = 8x$.

В успоредника $ABCD$ $AB = CD = 13x$ и от $S_{ABCD} = 52\sqrt{3}$ и

$S_{ABCD} = AB.AD.\sin 60° = 13x.8x.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \; = 52\sqrt{3}x^2$ се намира $x = 1$.

Страните на успоредника са $AB = CD = 13\,cm$ и $AD = BC = 8\,cm$.

б) От косинусовата теорема в $\triangle AMD$, $\triangle BCM$ и $\triangle ABM$ последователно се намира:

$$AM^2 = AD^2 + DM^2 - 2AD.DM.\cos 120° = \; 64 + 64 + 2.8.8.\frac{1}{2} = 3.64 = 192 \text{ и}$$

$AM = 8\sqrt{3}\,cm$;

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2BC.CM.\cos 60° = \; 64 + 25 - 2.8.5.\frac{1}{2} = 49 \text{ и } BM = 7\,cm;$$

$$\cos\sphericalangle AMB = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2.AM.BM} = \frac{192 + 49 - 169}{2.8\sqrt{3}.7} = \frac{72}{2.8\sqrt{3}.7} = \frac{9}{14\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

в) Ако h е височината към страната AB в $\triangle ABM$, то $S_{ABM} = \dfrac{AB.h}{2}$. От друга страна, $S_{ABCD} = AB.h$. Следователно $S_{ABM} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = 26\sqrt{3}\,cm^2$.

Построява се $AH \perp BM$ $(H \in BM)$ и от $S_{ABM} = \dfrac{1}{2}BM.AH$ се намира, че търсеното разстояние е $AH = \dfrac{2S_{ABM}}{BM} = \dfrac{2.26\sqrt{3}}{7} = \dfrac{52\sqrt{3}}{7}\,cm$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Означаване на $DM = BC = 8x$, $MC = 5x$ и доказване, че $AD = DM$.	2 точки
Намиране на $x = 1$ и на страните $AB = CD = 13\,cm$ и $AD = BC = 8\,cm$	3 точки
б) Намиране на $AM = 8\sqrt{3}\ cm$, $BM = 7\ cm$ и $\cos\sphericalangle AMB = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$	6 точки
в) Намиране на $S_{ABM} = 26\sqrt{3}\ cm^2$ и на търсеното разстоянието $AH = \dfrac{52\sqrt{3}}{7}cm$.	4 точки