МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

20 май 2022 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1.	Г	3
2.	В	3
3.	Б	3
4.	В	3
5.	Г	3
6.	В	4
7.	Г	4
8.	А	4
9.	Б	4
10.	Г	4
11.	Б	4
12.	А	4
13.	Г	4
14.	Г	4
15.	В	4
16.	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	15
17.	а) $a=2$ и $b=5$; б) $P(x)=(2x+5)(x-1)(x+1)$ $Q(x)=(x+1)(2x+5)(5x+2)$ в) $f'(x)=\frac{7}{(5x+2)^2}$	15
18.	а) $V=\frac{4\pi}{3}x^2(3-x)$ б) $\frac{16\pi}{3}$ при $x=2$	15

Задача 16.

Решение:

Нека p е дължината на ръбовете. Полагаме $\vec{x}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{y}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{z}=\overrightarrow{AD}$.

Понеже тетраедърът е правилен, имаме, че

$\vec{x}^2=\vec{y}^2=\vec{z}^2=p^2$ и $\vec{x}.\vec{y}=\vec{x}.\vec{z}=\vec{y}.\vec{z}=\frac{1}{2}p^2$.

От условието следва, че

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = -\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}$,

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$ и $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} - \vec{z}$

Пресмятаме, че $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DN} = \left(-\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}\right).\left(\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} - \vec{z}\right) = -\frac{1}{3}p^2$

$$\left|\overrightarrow{BM}\right|^2 = \left(-\vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{z}\right)^2 = \frac{2}{3}p^2$$

$$\left|\overrightarrow{DN}\right|^2 = \left(\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} - \vec{z}\right)^2 = \frac{3}{4}p^2$$

Оттук се пресмята, че косинусът на ъгъла θ между векторите $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{DN}$ е

$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DN}}{|\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{DN}|} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

Отговор: $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Избор на векторна база в пространството, така че за всеки два вектора от тази база да е известно тяхното скаларно произведение (например базата $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$ и $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$).	5 точки
Правилно изразяване на векторите $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{DN}$ чрез избрания базис.	5 точки
Правилно пресмятане на $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DN}$, $\left|\overrightarrow{BM}\right|^2$, $\left|\overrightarrow{DN}\right|^2$ и $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DN}}{|\overrightarrow{BM}||\overrightarrow{DN}|} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$	5 точки

Задача 17.

Решение:

а) От условието следва, че $P(-1) = P(1) = 0$. Тогава $a+b=7$ и $b-a=3$ откъдето $a=2$ и $b=5$.

б) Използване схемата на Хорнер и получаване, че $P(x) = (2x+5)(x-1)(x+1)$. За да се намерят нулите на $Q(x)$ се решава уравнението $10x^3 + 39x^2 + 39x + 10 = 0$, което е реципрочно от нечетна степен $\Rightarrow$ има корен $x=-1$ и тогава $Q(x) = (x+1)(10x^2 + 29x + 10)$. Тогава $Q(x) = (x+1)(2x+5)(5x+2)$.

в) Имаме $f(x)=\dfrac{(2x+5)(x-1)(x+1)}{(x+1)(2x+5)(5x+2)}$, чието дефиниционно множество е $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;-\dfrac{2}{5};-\dfrac{5}{2}\right\}$. Получаваме $f(x)=\dfrac{x-1}{5x+2}$; за производната имаме

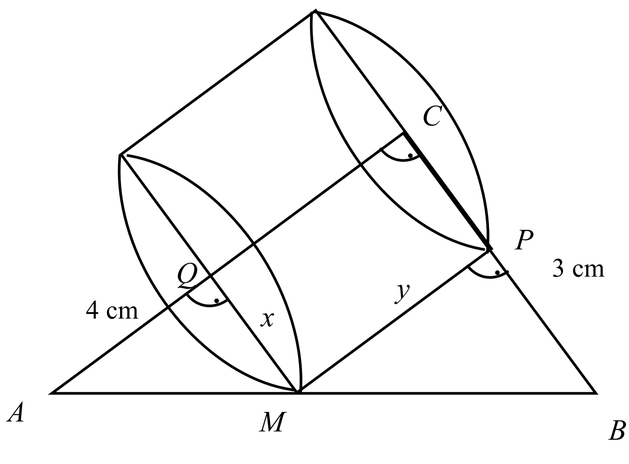
$$f'(x)=\frac{(x-1)'(5x+2)-(x-1)(5x+2)'}{(5x+2)^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{7}{(5x+2)^2}.$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) За получаване на равенствата	2 точки
За получаване на коефициентите	2 точки
б) За довършване разлагането на $P(x)$	2 точки
За извода, че -1 е нула на $Q(x)$, получаване на $Q(x)=(x+1)\left(10x^2+29x+10\right)$ и довършване разлагането на $Q(x)$	5 точки
в) За ДМ и получаване на $f(x)=\dfrac{x-1}{5x+2}$	1 точка
За правилно получаване на производната	3 точки

Задача 18.

Решение:



а) Четириъгълникът $MPCQ$ е правоъгълник.

Означаваме $QC=MP=y$.

$V=Bh=\pi r^2h=\pi x^2y$

$PC=MQ=x$, следователно $BP=3-x$

$QC=MP=y$, следователно $AQ=4-y$

$\triangle AMQ\sim\triangle MBP$, следователно $\dfrac{AQ}{MP}=\dfrac{MQ}{BP}$

$$\frac{4-y}{y}=\frac{x}{3-x}\Leftrightarrow xy=(4-y)(3-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{xy}=12-4x-3y+\cancel{xy}\Leftrightarrow y=\frac{12-4x}{3}$$

$MP=\dfrac{12-4x}{3}$ $\qquad V=\pi x^2y=\pi x^2\dfrac{12-4x}{3}=\dfrac{4\pi}{3}x^2(3-x)$ $\qquad x\in[0,3]$

б) Означаваме $f\left(x\right)=\dfrac{4\pi}{3}x^2\left(3-x\right)$

За да намерим максималния обем, трябва да намерим НГС на $f\left(x\right)$ при $x\in\left[0;3\right]$.

$f'\left(x\right)=\dfrac{4\pi}{3}2x\left(3-x\right)+\dfrac{4\pi}{3}x^2\left(-1\right)$ $\quad f'\left(x\right)=\dfrac{4\pi}{3}\left[2x\left(3-x\right)-x^2\right]=\dfrac{4\pi}{3}\left(6x-3x^2\right)$

$f'\left(x\right)=4\pi\left(2x-x^2\right)=4\pi x\left(2-x\right)$

$f\left(x\right)$ има локален максимум при $x=2$ и този локален максимум е най-голямата стойност на $f\left(x\right)$ при $x\in\left[0;3\right]$. Получава се, че $f_{\max}\left(x\right)=f\left(2\right)=\dfrac{16\pi}{3}$

Максималният обем на ротационното тяло е $\dfrac{16\pi}{3}$, който се достига при $x=2$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Полученото ротационно тяло е прав кръгов цилиндър	1 точка
За $\triangle AMQ\sim\triangle MBP$ и $\dfrac{AQ}{MP}=\dfrac{MQ}{BP}$	5 точки
За получаване на $V=\dfrac{4\pi}{3}x^2\left(3-x\right)$	3 точки
б) Намиране на локален максимум при $x\in\left[0;3\right]$ и максималния обем на ротационното тяло $\dfrac{16\pi}{3}$, който се достига при $x=2$.	6 точки