МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

26 август 2022 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

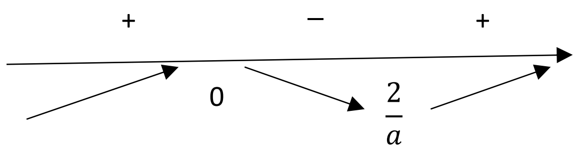
Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1.	Г	3
2.	Г	3
3.	Б	3
4.	А	3
5.	Б	3
6.	В	4
7.	А	4
8.	В	4
9.	В	4
10.	Б	4
11.	Г	4
12.	Б	4
13.	Б	4
14.	А	4
15.	В	4
16.	а) $3a^2 - max$ $3a^2 - \frac{4}{a^2} - min$ б) $a = 1$	15
17.	а) $AM: x + 2y - 3 = 0$ б) $AD: y = -4x + 5$ в) $\cos\measuredangle MAD = \frac{6\sqrt{85}}{85}$	15
18.	$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3}$; $x_3 = 2$; $x_4 = \frac{1}{2}$, $x = 2 + \sqrt{3}$ и $x = 2$ са решения на неравенството	15

Задача 16.
Решение:
а) $y = ax^3 - 3x^2 + 3a^2$ $\qquad\qquad y' = 3ax^2 - 6x = 3x(ax - 2)$

Производната има корени $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{2}{a}$

При $a > 0$ имаме:



$y_{max} = y(0) = 3a^2$

$y_{min} = y\left(\frac{2}{a}\right) = a\frac{8}{a^3} - 3\frac{4}{a^2} + 3a^2 = \frac{8}{a^2} - \frac{12}{a^2} + 3a^2 = -\frac{4}{a^2} + 3a^2$

б) $y_{min} + y_{max} = 2 \Rightarrow 3a^2 - \frac{4}{a^2} + 3a^2 = 2$

$6a^2 - 2 - \frac{4}{a^2} = 0\ /.\ a^2 > 0$

$6a^4 - 2a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 3a^4 - a^2 - 2 = 0$

Полагане $a^2 = b > 0$

Уравнението $3b^2 - b - 2 = 0$ има корени $b_1 = -\frac{2}{3} < 0$ не е решение и $b_2 = 1$

Тогава $a^2 = b = 1$ и $a = \pm 1$, $a > 0$

Отговор: $a = 1$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Намиране на производната; разлагане и нулиране при $a > 0$	3 точки
Нанасяне на числовата ос; определяне на знаците; локалните екстремуми и интервалите на растене и намаляване	3 точки
Пресмятане на локалните екстремуми	2 точки
б) Съставяне и решаване на зададеното уравнение. Определяне на ДС	5 точки
Отхвърляне на грешните и определяне на отговора $a = 1$.	2 точки

Задача 17.

Решение:

а) AM – медиана, следователно т. M е среда на страната BC. Намиране координатите на $M\left(\frac{6+10}{2};\frac{-3-2}{2}\right)$, т.е. $M\left(8;-\frac{5}{2}\right)$.

Намиране уравнението на правата AM през две точки:

$$\frac{x-1}{8-1}=\frac{y-1}{-\frac{5}{2}-1}\Leftrightarrow\frac{x-1}{7}=\frac{y-1}{-\frac{7}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\frac{7}{2}x+\frac{7}{2}=7y-7\Leftrightarrow-7x+7=14y-14\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow-7x-14y+21=0\Leftrightarrow x+2y-3=0$. Така се получава $AM: x+2y-3=0$

б) Намиране декартовото уравнение на правата, на която лежи страната BC:

$$\frac{x-6}{10-6}=\frac{y+3}{-2+3}\Leftrightarrow\frac{x-6}{4}=\frac{y+3}{1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-6=4y+12\Leftrightarrow x-4y-18=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{9}{2}$$

$AD\perp BC$ следователно $AD: y=-4x+b$.

Използване, че $A\in AD$, за да се намери коефициента b в декартовото уравнение, т.е. $1=-4.1+b$, откъдето $b=5$.

$AD: y=-4x+5$

в) Намиране колинеарни вектори с правите AM и AD, например $\vec{a}(-2;1)$ и $\vec{b}(-1;4)$.

$$\measuredangle(AM;AD)=\measuredangle(\vec{a};\vec{b})$$

Използване скаларното произведение:

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\measuredangle(\vec{a};\vec{b})$$

$$\cos\measuredangle MAD=\cos\measuredangle(\vec{a};\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\vec{a}.\vec{b}=-2.(-1)+1.4=6$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$$

$$\cos\measuredangle MAD=\frac{2+4}{\sqrt{5}.\sqrt{17}}=\frac{6}{\sqrt{85}}=\frac{6\sqrt{85}}{85}$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Намиране координатите на M и общото уравнение на правата AM	3 точки
б) Намиране декартовото уравнение на правата AD	4 точки
в) Намиране колинеарни вектори с правите AM и AD или техни нормални вектори	3 точки
Използване скаларното произведение $\vec{a}.\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\measuredangle\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ и намиране на $\lvert\vec{a}\rvert$ и $\lvert\vec{b}\rvert$	3 точки
Намиране на $\cos\measuredangle MAD$	2 точки

Забележка: за в) При вярно намиране чрез ъгловите коефициент на правите на $tg\measuredangle MAD$ и оттам на $\cos\measuredangle MAD$ – 8 точки.

Задача 18.

Решение:

$2x^4-13x^3+24x^2-13x+2=0\ /:\ x^2\neq 0$

$2x^2-13x+24-\frac{13}{x}+\frac{2}{x^2}=0$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-13\left(x+\frac{1}{x}\right)+24=0$$

Полагане: $x+\frac{1}{x}=z$ и изразяване: $x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2$.

Получаване: $2(z^2-2)-13z+24=0$

$2z^2-13z+20=0\quad D=169-4.40=9$

$$z_{1;2}=\frac{13\pm 3}{2}\ ;\ z_1=4\ ;\ z_2=\frac{5}{2}$$

След заместване:

$x+\frac{1}{x}=4$ при $x\neq 0\ \Rightarrow\ x^2-4x+1=0$

$D=16-4=12\qquad x_{1;2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\ \text{ при }\ x\neq 0\ \Rightarrow\ 2x^2-5x+2=0$$

$D=25-16=9\qquad x_{3;4}=\frac{5\pm 3}{4}=2$ и $\frac{1}{2}$

За неравенството $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ имаме: $x_{1,2} = 1$ и 5

Решението му е между корените $\Rightarrow x \in [1; 5]$.

От $x_1 = 2 - \sqrt{3} < 1$; $x_2 = 2 + \sqrt{3} \in [1; 5]$

$x_3 = \frac{1}{2} < 1$ и $x_4 = 2 \in [1; 5]$ Отговор: $x = 2 + \sqrt{3}$ и $x = 2$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Определяне, че уравнението е реципрочно $/x \neq 0/$, деление на $x^2 \neq 0$, групиране по коефициенти	2 точки
Полагане на $x + \frac{1}{x} = z$; определяне на $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$; заместване	3 точки
Решаване на уравнението $2z^2 - 13z + 20 = 0$ и определяне на $z_1 = 4$; $z_2 = \frac{5}{2}$	2 точки
Заместване и решаване на уравненията $x + \frac{1}{x} = 4$ и $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$. Определяне на $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$; $x_{3,4} = 2$ и $\frac{1}{2}$	4 точки
Решаване на неравенството $x^2 - 6x + 5 \leq 0 \Rightarrow x \in [1; 5]$ Определяне на корените, които са решения на неравенството	3 точки
Определяне на решенията на задачата $x = 2 + \sqrt{3}$; $x = 2 \in [1; 5]$	1 точка

Забележка: Решенията на уравнението могат да се определят и по схемата на Хорнер.