

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

29 август 2022 г.

ОБЩООБРАЗОВАТЕЛНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

ЧАСТ 1 (Време за работа: 90 минути)

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Ако $\log_3 x = \frac{1}{4}$, то x е:

А) $3^{\frac{1}{4}}$

Б) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$

В) 3^4

Г) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

2. Множеството от решенията на неравенството $2^x < -4$ е:

А) \emptyset

Б) $(-\infty; -4)$

В) $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$

Г) $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$

3. Даден е успоредник $ABCD$. Ако $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, то $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$ е

равно на:

А) $\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

Б) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

В) $2\vec{a}$

Г) $2\vec{b}$

4. Точка A е от графиката на функцията $y = 5^x + 2\lg x$. Ако абсцисата на тази точка е равна на 1, то ординатата ѝ е:

А) 2

Б) 5

В) 7

Г) невъзможно да се определи

5. Дефиниционното множество на функцията $y = 2^{\frac{1}{x}}$ е:

А) $(2; +\infty)$

Б) $(0; +\infty)$

В) $(-\infty; +\infty)$

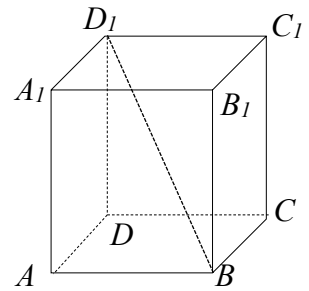
Г) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

14. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ е правилна четириъгълна призма.

Диагоналът BD_1 сключва с долната основа ъгъл 45° .

Ако $DD_1 = 6$ cm, то обемът на призмата е равен на:

- A) $36\sqrt{2}$ cm³
- Б) $72\sqrt{2}$ cm³
- В) 108 cm³
- Г) 216 cm³



15. С цифрите 0, 1, 2 и 4 са записани всички възможни трицифрени числа с различни цифри. Каква е вероятността при избор на едно от тези числа, това число да е нечетно или по-малко от 200?

- A) $\frac{2}{9}$
- Б) $\frac{4}{9}$
- В) $\frac{1}{3}$
- Г) $\frac{5}{9}$

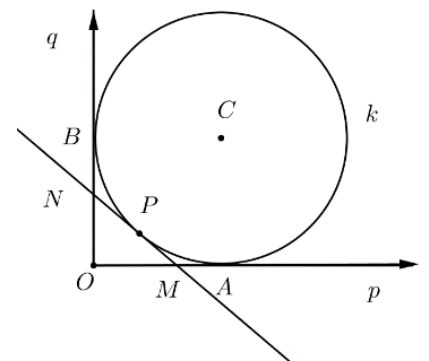
16. Числената стойност на израза $3 \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{cotg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}{\sin \pi + \cos(-4\pi)}$ е:

- A) $\sqrt{3} - 3$
- Б) $\sqrt{3} + 3$
- В) $3(\sqrt{3} - 3)$
- Г) $3(\sqrt{3} + 3)$

17. На чертежа окръжност k с център C се допира до раменете на $\sphericalangle pOq = 90^\circ$ в точки A и B . През точка P от дъгата \widehat{AB} е построена допирателна към k , която пресича раменете на ъгъла Op^{\rightarrow} и Oq^{\rightarrow} съответно в точки M и N .

Отношението на периметрите $\frac{P_{OACB}}{P_{OMN}}$ е равно на:

- A) 4:1
- Б) 3:1
- В) 3:2
- Г) 2:1



18. В правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C = 90^\circ$) ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ пресича височината CD в точка F и $CF = 3\sqrt{2}$ cm, $DF = \sqrt{2}$ cm. Лицето на $\triangle ABC$ е равно на:

- A) 72 cm²
- Б) $36\sqrt{2}$ cm²
- В) $18\sqrt{2}$ cm²
- Г) 18 cm²

19. Върху единичната окръжност $k(O; r = 1)$ е взета точка $M(0;1)$. Построена е точка $N \in k$, така, че ориентираният $\sphericalangle MON = -\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$. Координатите на N са:

- А) $(-1;0)$ Б) $\left(0; -\frac{3\pi}{2}\right)$ В) $(0;-1)$ Г) $\left(-\frac{3\pi}{2};0\right)$

20. Равнините α и β се пресичат в правата l . Точката $M \in \alpha$ и разстоянието от M до l е 10 cm, а разстоянието от M до β е $5\sqrt{3}$ cm. Ъгълът между равнините α и β е:

- А) 30° Б) 45° В) 60° Г) 90°

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

29 август 2022 г.

ОБЩООБРАЗОВАТЕЛНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 1

ЧАСТ 2 (Време за работа: 150 минути)

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 21. до 23. включително запишете в листа за отговори!

21. Дадени са уравненията:

(1) $|x^2 + 7x + 10| = 2$

(2) $25^x + 10 \cdot 5^{x-1} - 3 = 0$

(3) $x^2 \sqrt{2-x} = 9\sqrt{2-x}$

а) Решете уравненията (1), (2) и (3).

б) Намерете средноаритметичното на корените на трите уравнения.

22. За 20-членна аритметична прогресия е известно, че за сумите

$A = a_1 + a_3 + \dots + a_{17} + a_{19}$ (сборът на членовете с нечетни номера) и

$B = a_2 + a_4 + \dots + a_{18} + a_{20}$ (сборът на членовете с четни номера) са в сила

равенствата $B - A = 110$ и $\sqrt{B} - \sqrt{A} = \sqrt{10}$.

Да се намерят:

а) A и B ;

б) първият член a_1 и разликата d на прогресията.

23. Дадена е отсечка MN с дължина 2 cm и точка K , лежаща на нея. Нека S_1 е

**лицето на равнобедрен правоъгълен триъгълник с хипотенуза MK , а S_2 е
лицето на квадрат с дължина на страната KN .**

а) Ако $MK = x$, да се изрази сбора $S_1 + S_2$ като функция на x .

**б) Намерете дължината на катета на правоъгълния триъгълник, когато
сборът $S_1 + S_2$ е най-малък.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{при } D \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$ е парабола с връх точката $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in N$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{при } a \geq 0, k \geq 2, n \geq 2 \text{ и } m, n, k \in N$$

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 1$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = n.(n-1)...3.2.1 = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n = Kq^n = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Вероятности

Вероятност за настъпване на събитието A :

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

Вероятност на сбор от събития:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ ако } A \text{ и } B \text{ са несъвместими}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Вероятност на противоположно събитие:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A), \text{ където } \bar{A} \text{ е противоположното на събитието } A$$

$$\text{Условна вероятност: } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

Теорема за умножение на вероятности:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B), P(A) > 0, P(B) > 0$$

$$\text{Формула на Бернули: } P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Теорема за умножение на вероятности на независими събития $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Събитията A и B са независими ако $P(A|B) = P(A)$

Статистика

$$\text{Средна аритметична стойност: ср. ар.} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad (n \in N)$$

$$\text{Средна геометрична стойност: ср. геом.} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n} \quad (n \in N) (a_i > 0, \forall i)$$

$$\text{Средна хармонична стойност: ср. харм.} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad (n \in N) (a_i \neq 0, \forall i)$$

Претеглена средна стойност

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i$$

n_i – относителна честота

n – обем на извадката

Зависимости в триъгълник и успоредник

$$\begin{array}{llllll} \text{Правоъгълен триъгълник: } & c^2 = a^2 + b^2 & S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ch_c & a^2 = a_1 c & b^2 = b_1 c & \\ h_c^2 = a_1 b_1 & r = \frac{a+b-c}{2} & \sin \alpha = \frac{a}{c} & \cos \alpha = \frac{b}{c} & \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} & \operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a} \end{array}$$

Произволен триъгълник:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Формула за медиана:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \quad m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = pr \quad S = \frac{abc}{4R}$$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin \alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
\sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
\cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

Ръбести и валчести тела:

Призма:

$$S = Ph$$

$$S_1 = S + 2B$$

$$V = Bh$$

Пирамида:

$$S = \frac{Pa}{2}$$

$$S_1 = S + B$$

$$V = \frac{Bh}{3}$$

Прав кръгов цилиндър:

$$S = 2\pi rh$$

$$S_1 = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$V = \pi r^2 h$$

Прав кръгов конус:

$$S = \pi rl$$

$$S_1 = \pi rl + \pi r^2$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Сфера и кълбо:

$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$