МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

21.05.2021 г. - Вариант 1

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1	А	2
2	Г	2
3	А	2
4	А	2
5	В	2
6	В	2
7	Г	2
8	А	2
9	Б	2
10	А	2
11	Г	3
12	В	3
13	Б	3
14	Б	3
15	В	3
16	Б	3
17	А	3
18	Б	3
19	Б	3
20	Б	3
21	$A=2\sqrt{3}$	4
22	$x\in[-3;-2)\cup(0;1]$	4
23	10	4

24	$\frac{26}{33}$	**4**
25	$r=\frac{1}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ **cm**	**4**
26	а) $x\in\left[1;2\right)\cup\left(2;\infty\right)$ б) $x=\frac{10}{9}$	**10**
27		**10**
28	а) $MD=4$ **cm**	**10**

Задача 26.

***Решение**:* а) Дефиниционното множество DM на функцията се определя от решенията на системата $\left|\begin{array}{l}x-1\geq 0\\ \sqrt{x-1}\neq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x\geq 1\\ x\neq 2\end{array}\right. \Leftrightarrow DM: x\in\left[1;2\right)\cup\left(2;\infty\right)$.

б) При $x\in DM: f\left(x\right)=1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{2\left(\sqrt{x-1}-1\right)}+\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x-2+2\left(x-1\right)-2\sqrt{x-1}=2\sqrt{x-1}-2\ \Leftrightarrow\ 4\sqrt{x-1}=3x-2$.

Повдигаме в квадрат и решаваме уравнението $16\left(x-1\right)=\left(3x-2\right)^2\Leftrightarrow$ $16x-16=9x^2-12x+4\Leftrightarrow 9x^2-28x+20=0, x_1=2\notin DM, x_2=\frac{10}{9}\in DM$.

С проверка $\left(4\sqrt{\frac{10}{9}-1}=3.\frac{10}{9}-2\Leftrightarrow 4.\frac{1}{3}=\frac{10}{3}-2\right)$ или с еквивалентност $\left(3x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{2}{3}\right)$ установяваме, че $x=\frac{10}{9}$ е решение. Следователно уравнението има единствен корен $x=\frac{10}{9}$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Определяне на $x\geq 1, x\neq 2$ или $x\in\left[1;2\right)\cup\left(2;\infty\right)$	**2 точки**
б) Преобразуване на уравнението до вида $4\sqrt{x-1}=3x-2$	**2 точки**
Получаване на уравнението $9x^2-28x+20=0$	**2 точки**
Намиране на корените $x_1=2$ и $x_2=\frac{10}{9}$	**2 точки**
Установяване, че $x=2$ не е решение	**1 точка**

Установяване, че $x=\frac{10}{9}$ е решение (с проверка или с еквивалентност)	**1 точка**

Задача 27.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:
а)

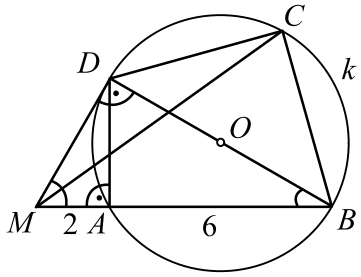
$A=\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$	**1 точка**
$=\dfrac{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left[\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\frac{\alpha}{2}\right]=$	**1 точка**
$=2\sqrt{2}\sin\dfrac{90^\circ-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}}{2}\cos\dfrac{90^\circ-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2}=2\sqrt{2}\sin 45^\circ\cos\left(\dfrac{90^\circ-\alpha}{2}\right)=$	**1 точка**
$=2\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$ и следователно $A=B$	**1 точка**

б)

От $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{7}$ и основното тригонометрично тъждество получаваме $\left\lvert\begin{array}{l}\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{7}\\ \sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1\end{array}\right.$ получаваме $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\alpha}{2}\in\left(0^\circ;\,90^\circ\right)\Rightarrow\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$	**2 точки**
Тогава $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\frac{\sqrt{14}}{4}\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{16}-\frac{14}{16}=-\frac{3}{4}$.	**2 точки**
Следователно $B=2\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1+\frac{\sqrt{7}}{4}-\frac{3}{4}}{\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$	**2 точки**

Задача 28.

Решение: а) От равенството $MD^2 = MA.MB \Leftrightarrow MD^2 = 2.8$ намираме $MD = 4$ cm.



Ще докажем, че $\sphericalangle MAD = 90°$, от което ще следва, че $AD \perp MB$.

От косинусовата теорема в $\triangle MAD$ намираме

$$AD^2 = MA^2 + MD^2 - 2.MA.MD.\cos 60° = 4 + 16 - 2.2.4.\frac{1}{2} = 12 .$$

От $MA^2 + AD^2 = 4 + 12 = 16 = MD^2$ следва, че $\triangle MAD$ е правоъгълен с $\sphericalangle MAD = 90°$.

От $AD \perp MB$ следва, че $\sphericalangle BAD = 90°$. Но той е вписан в k, BD е диаметър на k и $O \in BD$.

б) Тъй като MD е допирателна на k, то $MD \perp DO$, $\triangle MDB$ е правоъгълен, $\sphericalangle BMD = 60°$ и

$$BD = MB.\sin 60° = 8.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ cm}.$$

По условие $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$. Тогава $BC = CD$, $\triangle BCD$ е равнобедрен и правоъгълен (BD е диаметър на k), $\sphericalangle CBD = 45°$ и $BC = BD.\sin 45° = 4\sqrt{3}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$ cm.

В $\triangle MDC$ $\sphericalangle MDC = \sphericalangle MDB + \sphericalangle CDB = 90° + 45° = 135°$.

От косинусовата теорема в $\triangle MDC$ намираме: $MC^2 = MD^2 + DC^2 - 2MD.DC.\cos 135° =$

$$= 16 + 24 + 2.4.2\sqrt{6}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 40 + 8.2\sqrt{3} = 40 + 16\sqrt{3} = 4\left(10 + 4\sqrt{3}\right) \text{ и } MC = 2\sqrt{10 + 4\sqrt{3}} \text{ cm}.$$

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Намиране на $MD = 4$ cm	**1 точка**
Доказване , че $AD \perp MB$ и $O \in BD$	**3 точки и 1 точка**
б) Пресмятане на $BC = 2\sqrt{6}$ cm	**2 точки**
Пресмятане на $MC = 2\sqrt{10 + 4\sqrt{3}}$ cm	**3 точки**