<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА

27.08.2021 г. - Вариант 2

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1	А	2
2	Г	2
3	Г	2
4	Б	2
5	Б	2
6	В	2
7	Г	2
8	Г	2
9	Б	2
10	Б	2
11	Б	3
12	В	3
13	А	3
14	В	3
15	В	3
16	В	3
17	Г	3
18	Г	3
19	Б	3
20	А	3
21	20	4
22	$x \in (-2; 1) \cup (1; 2)$	4
23	$-188\sqrt{2}$	4
24	3%	4
25	250 $\mathbf{cm^2}$	4
26	**а)** $D_f : x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1;2\}$ **и** $D_g : x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0;\frac{2}{3};1\right\}$	10

	б) $x=-\frac{2}{3}$	
27	**б)** $B=\frac{11}{4}$	**10**
28	$S_{ABCD}=3\sqrt{15}$ **cm²**	**10**

Задача 26.

Решение: а) Дефиниционните множества D_f и D_g на функциите $f\left(x\right)$ и $g\left(x\right)$ се определят съответно от условията:

$$x\neq 1,\ x\neq 0,\ \frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}\neq 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{\left(x-1\right)x}\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \text{ и } D_f : x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;1;2\right\}$$

$$x\neq 1,\ x\neq 0,\ \frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}\neq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{\left(x-1\right)x}\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{2}{3} \text{ и } D_g : x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;\frac{2}{3};1\right\}.$$

б) Дефиниционното множество DM на уравнението $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ е обединението на D_f и D_g, т.е. $DM : x\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;\frac{2}{3};1;2\right\}$.

При $x\in DM$ уравнението $\dfrac{x}{\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}}=\dfrac{1}{\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}}$ е равносилно на $x\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}+2+\frac{2}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-1}+2+\frac{2}{x}=0 \Leftrightarrow 3+\frac{2}{x}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}.$$

Тъй като $-\frac{2}{3}\in DM$, то е единственото решение на уравнението $f\left(x\right)=g\left(x\right)$.

Забележка. Ако не се съобрази, че $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}=1$, след освобождаване от знаменател на уравнението $x\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}$ се получава $3x^2-x-2=0$ с корени $x_1=1\notin DM$ и $x_2=-\frac{2}{3}\in DM$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) Определяне на дефиниционните множества D_f и D_g	**4 точки** **(по 2 точки за всяко)**
б) Определяне на дефиниционното множество DM на уравнението $f\left(x\right)=g\left(x\right)$	**1 точка**

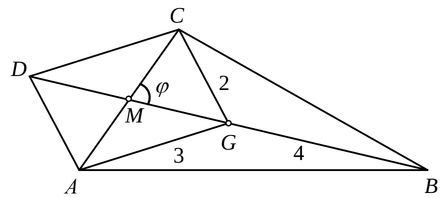
Преобразуване на уравнението $\dfrac{x}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x}}$ до получаване на $3+\dfrac{2}{x}=0$	**4 точки**
Определяне на решението $x=-\dfrac{2}{3}$	**1 точка**

Задача 27. Решение:

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $B=4\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=4.\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha-\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha+\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)\right]=$ $=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos 2\alpha\right)=$	**2 точки**
$=2\left(\dfrac{1}{2}-\cos 2\alpha\right)=1-2\cos 2\alpha=1-2\left(2\cos^2\alpha-1\right)=3-4\cos^2\alpha$	**2 точки**
б) От $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{15}$ и основното тригонометрично тъждество получаваме $\left\|\begin{array}{l}\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{15}\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{array}\right.$	**2 точки**
$\left\|\begin{array}{l}\sin\alpha=\sqrt{15}\cos\alpha\\ \left(\sqrt{15}\cos\alpha\right)^2+\cos^2\alpha=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{l}\sin\alpha=\sqrt{15}\cos\alpha\\ 16\cos^2\alpha=1\end{array}\right. \Rightarrow \cos^2\alpha=\dfrac{1}{16}$	**2 точки**
От $A=B$ получаваме, че $B=3-4\cos^2\alpha=3-4.\dfrac{1}{16}=3-\dfrac{1}{4}=\dfrac{11}{4}$.	**2 точки**

Задача 28.



Решение: Означаваме с M средата на AC. От условието, че G е медицентър и среда на отсечката BD следва, че $MG=\dfrac{1}{2}BG=\dfrac{1}{2}DG$, т. е. M е среда и на DG.

Тогава $AGCD$ е успоредник със страни $AG=3$ cm, $CG=2$ cm и диагонал $DG=BG=4$ cm.

От равенството $AC^2+DG^2=2AG^2+2CG^2$ намираме $AC^2=2AG^2+2CG^2-DG^2=10$ и $AC=\sqrt{10}$ cm.

Ако $\sphericalangle BMC = \varphi$, от $\triangle CMG$ намираме $\cos\varphi = \dfrac{MG^2 + MC^2 - CG^2}{2MG.MC} = \dfrac{4 + \dfrac{10}{4} - 4}{2.2.\dfrac{\sqrt{10}}{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{8}$.

Тогава $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \dfrac{10}{64}} = \sqrt{\dfrac{54}{64}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$.

Лицето на четириъгълника $ABCD$ е $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}.AC.BD.\sin\varphi = \dfrac{1}{2}\sqrt{10}.8.\dfrac{3\sqrt{6}}{8} = 3\sqrt{15}$ cm^2.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Доказване, че $AGCD$ е успоредник	**2 точки**
Пресмятане на диагонала $AC = \sqrt{10}$ cm	**2 точки**
Намиране на $\sin\varphi = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$	**4 точки**
Намиране на лицето $S_{ABCD} = 3\sqrt{15}$ cm^2	**2 точки**