**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**

**ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА**

**02.06.2020 г. – Вариант 2**

| **№ на задача** | **Верен отговор** | **Брой точки** |
|---|---|---|
| **1** | **В** | **2** |
| **2** | **А** | **2** |
| **3** | **Б** | **2** |
| **4** | **Г** | **2** |
| **5** | **Г** | **2** |
| **6** | **В** | **2** |
| **7** | **Б** | **2** |
| **8** | **А** | **2** |
| **9** | **В** | **2** |
| **10** | **Б** | **2** |
| **11** | **Г** | **3** |
| **12** | **Г** | **3** |
| **13** | **Б** | **3** |
| **14** | **Г** | **3** |
| **15** | **В** | **3** |
| **16** | **В** | **3** |
| **17** | **Б** | **3** |
| **18** | **В** | **3** |
| **19** | **А** | **3** |
| **20** | **В** | **3** |
| **21** | $-1$ | **4** |
| **22** | $x\in(0;\,2)\cup(2;\,4)$ **или** $x\in(0;\,4)\setminus\{2\}$ | **4** |
| **23** | 195 | **4** |
| **24** | 30 | **4** |

| | | |
|---|---|---|
| **25** | $R=\frac{20}{\sqrt{7}}=\frac{20\sqrt{7}}{7}$ cm | **4** |
| **26** | $-1$ **и** $4$ | **10** |
| **27** | | **10** |
| **28** | $BC=CD=AD=6\,\text{cm}$<br>$BD=AC=6\sqrt{3}$ cm<br>$60°, 120°, 60°, 120°$<br>$S=27\sqrt{3}$ cm$^2$ | **10** |

**Задача 26.**

***Решение:*** а) Дефиниционното множество *DM* на функцията се определя от решенията на системата $\left|\begin{array}{l} x^2-3x\geq 0 \\ x\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x(x-3)\geq 0 \\ x\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;\,0)\,\cup\,[3;\,\infty)$.

б) При $x\in DM$:

$$2\left(x-1-\frac{2}{x}\right)\sqrt{x^2-3x}=x^2-x-2 \Leftrightarrow \frac{2\left(x^2-x-2\right)}{x}\sqrt{x^2-3x}=x^2-x-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-x-2\right)\sqrt{x^2-3x}-x\left(x^2-x-2\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)\left(2\sqrt{x^2-3x}-x\right)=0.$$

1. $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x_1=-1\in DM$, $x_2=2\notin DM$ .

2. $2\sqrt{x^2-3x}=x$ .

Повдигаме в квадрат и получаваме уравнението $4x^2-12x=x^2 \Leftrightarrow 3x(x-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_3=0\notin DM$ , $x_4=4\in DM$ .

С проверка установяваме, че $x_4=4$ е решение $\left(2\sqrt{16-12}=4\right)$.

Следователно даденото уравнение има две решения: $-1$ и $4$.

**Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:**

| **Етапи** | **Оценяване** |
|---|---|
| а) За намиране на *DM:* $x\in(-\infty;\,0)\,\cup\,[3;\,\infty)$ | **2 точки** |

| | |
|---|---|
| б) Представяне на уравнението във вида $\left(x^2-x-2\right)\left(2\sqrt{x^2-3x}-x\right)=0$ | **1 точка** |
| Намиране на корените на уравнението $x^2-x-2=0$ | **1 точка** |
| Установяване, че $x=2$ не е решение | **1 точка** |
| Установяване, че $x=-1$ е решение | **1 точка** |
| Решаване на уравнението $2\sqrt{x^2-3x}=x$ | **2 точки** |
| Направен извод, че $x=0\notin DM$ | **1 точка** |
| Извод, че само $x=4$ е корен | **1 точка** |

**Задача 27**

*Първи начин :*

**Решение**: Образуваме разликата

$$\frac{\mathrm{tg}\left(90^\circ-\alpha\right)+\mathrm{tg}\alpha+2}{\mathrm{co\,tg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}-\frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\mathrm{cotg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha+2}{\mathrm{co\,tg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha}-\frac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}$$

$$=\frac{\left(\mathrm{cotg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha+2\right)\left(1-\mathrm{tg}\alpha\right)-\left(\mathrm{tg}\alpha+1\right)\left(\mathrm{co\,tg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha\right)}{\left(\mathrm{co\,tg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha\right)\left(1-\mathrm{tg}\alpha\right)}=$$

$$=\frac{\mathrm{cotg}\alpha+\mathrm{tg}\alpha+2-1-\mathrm{tg}^2\alpha-2\mathrm{tg}\alpha-1-\mathrm{cotg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{\left(\mathrm{co\,tg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha\right)\left(1-\mathrm{tg}\alpha\right)}=0$$

**Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:**

| | |
|---|---|
| За прилагане на формулата $\mathrm{tg}\left(90^\circ-\alpha\right)=\cot\mathrm{g}\alpha$ | **1 точка** |
| За привеждане под общ знаменател | **1 точка** |
| За всяко прилагане на формулата $\mathrm{tg}\alpha.\cot\mathrm{g}\alpha=1$ по една точка | **2 точки** |
| За правилно разкриване на скобите (за всяка двойка скоби по една точка) | **2 точки** |
| За тъждествени преобразувания след разкриване на скобите | **2 точки** |
| За окончателно довършване и извод, че равенството е тъждество | **2 точки** |

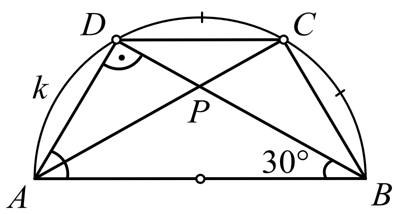
*Втори начин:*

| | |
|---|---|
| За прилагане на формулата $\mathrm{tg}\left(90^\circ-\alpha\right)=\cot\mathrm{g}\alpha$ | **1 точка** |

| | |
|---|---|
| За прилагане на формулата $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ | **1 точка** |
| За прилагане на тъждеството $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ | **1 точка** |
| За стъпката $\dfrac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+2}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha.\cos\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}}$ | **1 точка** |
| За стъпката $\dfrac{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha.\cos\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha}} = \dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha.\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ | **1 точка** |
| За всяка от формулите в числителя и знаменателя по една точка или за $\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha.\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}$ | **2 точки** |
| За стъпката $\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ | **1 точка** |
| За стъпката $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}{\cos\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)}$ | **1 точка** |
| За $\dfrac{\cos\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}{\cos\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)} = \dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$ | **1 точка** |

**Задача 28.**

***Решение:***




От $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$ следва, че $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD$ (вписани ъгли), $AP$ е ъглополовяща в $\triangle ABD$ и $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DP}{PB} = \dfrac{1}{2}$.

В $\triangle ABD$ с $\sphericalangle ADB = 90^\circ$ ($AB$ е диаметър на $k$ и $D \in k$) и от $AD = \dfrac{1}{2}AB$ следва, че $\sphericalangle ABD = 30^\circ$ и $\sphericalangle BAD = 60^\circ$.

Тогава $\overset{\frown}{AD} = 2\sphericalangle ABD = 60^\circ$, $\overset{\frown}{BCD} = 120^\circ$, $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = 60^\circ$, $\sphericalangle ABC = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{ADC} = 60^\circ$, $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD = 120^\circ$ и $ABCD$ е равнобедрен трапец.

В $\triangle ABD$ $BD = AB.\sin 60° = 12.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ cm.

Дължините на страните на четириъгълника $ABCD$ са $AB = 12$ cm (по условие), $BC = CD = AD = \dfrac{1}{2}AB = 6$ cm, а на диагоналите – $AC = BD = 6\sqrt{3}$ cm.

Като вземем предвид, че $\sphericalangle BPC = 60°$ (външен ъгъл за $\triangle APB$), лицето на четириъгълника е $S = \dfrac{1}{2}AC.BD.\sin\sphericalangle BPC = \dfrac{1}{2}.6\sqrt{3}.6\sqrt{3}.\sin 60° = 54.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}$ cm$^2$.

**Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:**

| | |
|---|---|
| Доказване, че $AC$ е ъглополовяща на $\sphericalangle BAD$ | **1 точка** |
| Намиране $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{DP}{PB}$ от ъглополовящата $AP$ в $\triangle ABD$ | **2 точки** |
| Намиране на $\sphericalangle ABD = 30°$ | **1 точка** |
| Намиране на $\sphericalangle BAD = 60°$ | **1 точка** |
| Намиране на страните $AD$, $BC$ и $CD$ | **1 точка** |
| Намиране на ъглите $\sphericalangle ABC = 60°$, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ADC = 120°$ | **1 точка** |
| Намиране на диагоналите $BD = AC = 6\sqrt{3}$ cm | **1 точка** |
| Намиране на лицето $S = 27\sqrt{3}$ cm$^2$ | **2 точки** |