<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

03.06.2020 г. – Вариант 2

№ на задача	Верен отговор	Брой точки
1	Б	2
2	Г	2
3	В	2
4	Б	2
5	А	2
6	Б	2
7	В	2
8	А	2
9	Г	2
10	В	2
11	Г	3
12	Б	3
13	А	3
14	Б	3
15	А	3
16	Г	3
17	А	3
18	В	3
19	В	3
20	Г	3
21	$A=6$	4
22	$x\in(-\infty;-3]\cup\{2\}\cup[3;+\infty)$	4
23	$a_1=3;\ d=4$	4
24	4,78	4

25	$\sin \sphericalangle MGN = \dfrac{2}{3}$	**4**
26	-1	**10**
27	$(1;\,-1)$ **и** $(1;\,1)$	**10**
28	$\sqrt{6}+\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$	**10**

Задача 26.

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението

Решаваме уравнението $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}=\dfrac{5}{2}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$.

Полагаме $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}=u,\ u>0$	**2 точки**
Достигане до квадратното уравнение $u=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{u}\Leftrightarrow 2u^2-5u+2=0$	**1 точка**
За намиране на корените $u_1=2,\ u_2=\dfrac{1}{2}$ и определяне, че са решения	**2 точки**
Решаване на уравнението $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}=2,\ \ x=2$ и установяване, че е решение	**2 точки**
Решаване на уравнението $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}=\dfrac{1}{2},\ x=-3$ и установяване, че е решение	**2 точки**
Сборът на двата корена е $2-3=-1$	**1 точка**

Забележка: Ако дефиниционното множество е намерено предварително, то проверката може да се прави и в дефиниционното множество на уравнението.

Задача 27.

Решение: При $x\neq 0$, $y\neq 0$ уравнението $x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ е еквивалентно на

$(x+y)xy=x+y \Leftrightarrow (x+y)xy-(x+y)=0 \Leftrightarrow (x+y)(xy-1)=0 \Leftrightarrow x+y=0$ или $xy-1=0.$

Тогава дадената система е равносилна на обединението на системите

$$(1)\ \left|\begin{array}{l} x+y=0 \\ x^2+xy=y+1 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left|\begin{array}{l} xy-1=0 \\ x^2+xy=y+1 \end{array}\right. \ (2).$$

Решаваме (1): $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ x^2-x^2=-x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1,\ y=-1$.

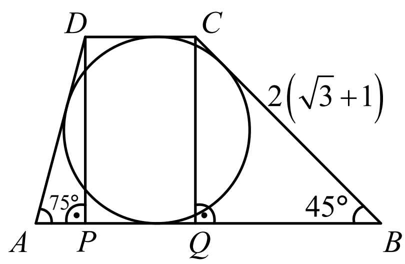
Решаваме (2): $\begin{cases} xy=1 \\ x^2+xy=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ x^2+1=\dfrac{1}{x}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ x^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1,\ y=1$.

Следователно системата има две решения – двойките числа $(1;\,-1)$ и $(1;\,1)$.

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Определяне на $x \neq 0$, $y \neq 0$	**1 точка**
Преобразуване на уравнението $x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ до получаване на $x+y=0$ или $xy-1=0$	**3 точки**
Решаване на системата $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy=y+1 \end{cases}$	**2 точки**
Решаване на системата $\begin{cases} xy-1=0 \\ x^2+xy=y+1 \end{cases}$	**3 точки**
Записване на двойките решения $(1;\,-1)$ и $(1;\,1)$.	**1 точка**

Задача 28



Решение: Построяваме височините CQ и DP. От $\triangle BQC$ намираме, че $CQ=BC.\sin 45^\circ = 2\left(\sqrt{3}+1\right).\dfrac{\sqrt{2}}{2}=$

$=\left(\sqrt{3}+1\right).\sqrt{2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

От $\triangle APD$ получаваме, че

$\dfrac{DP}{AD}=\sin 75^\circ \Leftrightarrow AD=\dfrac{DP}{\sin 75^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 75^\circ}$.

Пресмятаме $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ.\cos 30^\circ+\cos 45^\circ.\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Намираме $AD = \frac{DP}{\sin 75^\circ} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 75^\circ} = 4$.От условието, че трапецът е описан около окръжност следва, че $AB + CD = BC + AD$ т.е. $AB + CD = 2\sqrt{3} + 2 + 4 = 2\sqrt{3} + 6$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(AB + CD\right).CQ = \left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right) = \sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

За чертеж на трапеца с построени височини	**1 точка**
За намиране на $CQ = BC.\sin 45^\circ$	**1 точка**
За окончателно пресмятане на $CQ = \left(\sqrt{3}+1\right).\sqrt{2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$	**1 точка**
За изразяване на $\frac{DP}{AD} = \sin 75^\circ$	**1 точка**
За намиране на $\sin 75^\circ$ $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ.\cos 30^\circ + \cos 45^\circ.\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	**2 точки**
За намиране на $AB + CD = BC + AD$	**1 точка**
За намиране на $AB + CD = 2\sqrt{3} + 2 + 4 = 2\sqrt{3} + 6$	**1 точка**
За изразяване на $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(AB + CD\right).CQ = \left(\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) =$ $= \sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right) = \sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)^2$	**2 точки**

Забележка: Ако е изразено лицето чрез $\sin 75^\circ$ без да бъде пресметнато в писмената работа, да се оценява задачата с общо 8 точки.