МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

23.05.2019 г. – Вариант 1

Ключ с верните отговори

№ на задача	Верен отговор	Брой точки
1	**А**	**2**
2	**Г**	**2**
3	**Б**	**2**
4	**В**	**2**
5	**А**	**2**
6	**Г**	**2**
7	**В**	**2**
8	**А**	**2**
9	**Б**	**2**
10	**Б**	**2**
11	**В**	**3**
12	**Г**	**3**
13	**Г**	**3**
14	**А**	**3**
15	**Г**	**3**
16	**Г**	**3**
17	**Б**	**3**
18	**Б**	**3**
19	**Г**	**3**
20	**А**	**3**
21	8	**4**
22	$x \in (0;1) \cup (1;4]$	**4**
23	153	**4**
24	4,85	**4**

25	$AN - MN = \frac{5}{2}\text{ cm} = 2,5\text{ cm}$	**4**
26	$x_1 = 2, x_2 = -4$	**10**
27		**10**
28	$AC = 6,\ BC = 10\ ,\ CL = \frac{15}{4}$	**10**

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Решение на задача 26:

Връзка между $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ и $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$.	**1 точка**
Полагане $(x+1)^2 = t,\ t \geq 0$.	**2 точки**
Решаване на уравнението $t^2 - 3t - 54 = 0$.	**2 точки**
Определяне $t_1 = 9,\ 9 > 0,\ t_2 = -6,\ -6 < 0$.	**1 точка**
Връщане в полагането $(x+1)^2 = 9$.	**1 точка**
Решаване на $x + 1 = 3$ и $x + 1 = -3$.	**2 точки**
Намиране на решенията $x_1 = 2, x_2 = -4$.	**1 точка**

Решение на задача 27:

а) $A = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1 =$

$$\underbrace{= \left(\sin^2\alpha\right)^3 + \left(\cos^2\alpha\right)^3 - 1 = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right) - 1 =}_{1\text{ точка}}$$

$$\underbrace{= 1.\left(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha\right) - 1 = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 =}_{1\text{ точка}}$$

$$\underbrace{= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = -3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}_{1\text{ точка}}$$

$$B = \underbrace{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1 = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 =}_{1\text{ точка}}$$

$$\underbrace{= 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1 = -2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}_{1\text{ точка}}$$

$A = -3\sin^2\alpha\cos^2\alpha,\ B = -2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$\underbrace{A - \frac{3}{2}B = -3\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \frac{3}{2}.2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 0 \Rightarrow A = \frac{3}{2}B}_{\text{1 точка}}$$

б) $C = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \underbrace{\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\left[\cos(\pi - 2\alpha) - \cos\frac{\pi}{3}\right]}_{\text{1 точка}} =$

$$= \underbrace{\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\left[-\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\right]}_{\text{1 точка}} = \underbrace{\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\left[\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \frac{1}{2}\right]}_{\text{1 точка}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}}_{\text{1 точка}}$$

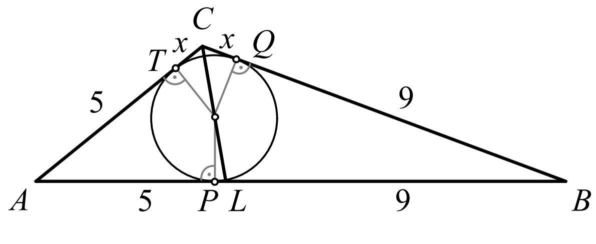
За определяне на $A = -3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.	**3 точки**
За определяне на $B = -2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.	**2 точки**
За извод, че $A = \frac{3}{2}B$.	**1 точка**
За доказване, че $C = \frac{3}{4}$.	**4 точки**

Решение на задача 28:

Прилагаме синусова теорема за $\triangle ABC$

$\sin\sphericalangle ACB = \frac{AB}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тогава $\sphericalangle ACB = 120°$ или $\sphericalangle ACB = 60°$,



но $\triangle ABC$ е тъпоъгълен и AB е най-голямата страна, то $\sphericalangle ACB = 120°$.

Да означим допирните точки на окръжността със страните AC и BC съответно с T и Q. Намираме $AT = AP = 5$ и $BQ = BP = 9$. Нека $CQ = CT = x, x > 0$.

Прилагаме косинусова теорема за $\triangle ABC$: $14^2 = (x+5)^2 + (x+9)^2 - 2(x+5)(x+9)\cos 120°$

$\Leftrightarrow x^2 + 14x - 15 = 0$. Оттук $x = 1$ или $x = -15$. Намираме $AC = 6,\ BC = 10$.

Ако CL е ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$, то $\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{5}$.

Нека $AL = 3y, BL = 5y$ и $3y + 5y = 14 \Leftrightarrow y = \frac{7}{4}$. Тогава $AL = \frac{21}{4}$ и $BL = \frac{35}{4}$, а

$CL^2 = AC.BC - AL.BL \Rightarrow CL = \sqrt{6.10 - \frac{21}{4}.\frac{35}{4}} = \frac{15}{4}$.

За намиране на $\sin \sphericalangle ACB = \frac{AB}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	**1 точка**
За определяне на $\sphericalangle ACB = 120^\circ$.	**1 точка**
За определяне на $AT = AP = 5$ и $BQ = BP = 9$.	**1 точка**
За въвеждане на неизвестно $CQ = CT = x, x > 0$.	**1 точка**
За прилагане на косинусова теорема за $\triangle ABC$.	**1 точка**
За достигане до уравнението $x^2 + 14x - 15 = 0$ и решаването му.	**2 точки**
За определяне дължините на страните AC и BC	**1 точка**
За изразяване на $AL.BL$ или намиране на дължините на AL и BL.	**1 точка**
За намиране на дължината на $CL = \frac{15}{4}$.	**1 точка**