**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**

**ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО**

**Математика – 22 май 2015 г.**

**ВАРИАНТ 1**

**Ключ с верните отговори**

**Въпроси с изборен отговор**

| Въпрос № | Верен отговор | Брой точки |
|---|---|---|
| **1** | **А** | 2 |
| **2** | **В** | 2 |
| **3** | **А** | 2 |
| **4** | **Г** | 2 |
| **5** | **Г** | 2 |
| **6** | **Г** | 2 |
| **7** | **Б** | 2 |
| **8** | **Б** | 2 |
| **9** | **В** | 2 |
| **10** | **Г** | 2 |
| **11** | **Г** | 3 |
| **12** | **Б** | 3 |
| **13** | **В** | 3 |
| **14** | **Б** | 3 |
| **15** | **Г** | 3 |
| **16** | **Б** | 3 |
| **17** | **Б** | 3 |
| **18** | **В** | 3 |
| **19** | **Б** | 3 |
| **20** | **В** | 3 |
| **21** | 2 | 4 |
| **22** | $-\frac{2}{\sqrt{13}}$ или $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$ | 4 |
| **23** | 4% | 4 |
| **24** | $S=18-4\pi$ или $S=2(9-2\pi)$ | 4 |
| **25** | $S_{\triangle ABC}=63\,\text{cm}^2$ | 4 |
| **26** | $x_1=-3,\ x_2=1,\ x_3=3$ | 10 |
| **27** | 336 | 10 |
| **28** | $R=\frac{a}{3}$ | 10 |

## Въпроси с решения

### 26. Критерии за оценяване

**По решението**

***I начин***

1. Изнасяне на множител $(x+3)$ и представяне на уравнението във вида $(x+3)\left[(x+1)(x-2)+(x-1)(x-5)+(x-2)(x-3)\right]=0$ . (2 т.)

2. Вярно разкриване на малките скоби и свеждане на уравнението до еквивалентното му $(x+3)\left(x^2-x-2+x^2-6x+5+x^2-5x+6\right)=0$ за всяко събираемо по 1 точка. (3 т.)

3. За правилно приведение и свеждане на уравнението до еквивалентното му $(x+3)\left(3x^2-12x+9\right)=0$. (2 т.)

4. За намиране на трите корена $x_1=-3,\ x_2=1,\ x_3=3$. (3 т.)

***II начин***

1.Правилно разкриване на скобите (по 1точка за всяко от трите събираеми ) и свеждане на уравнението до еквивалентното му $3x^3-3x^2-27x+27=0$. общо (4 т.)

2. Последователно получаване на еквивалентните уравнения $3\left(x^3-x^2-9x+9\right)=0\,|:3 \Leftrightarrow x^2(x-1)-9(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-9\right)=0$ . (2 т.)

3. Свеждане до уравнението $(x-1)(x+3)(x-3)=0$. (1 т.)

4. За намиране на трите корена $x_1=-3,\ x_2=1,\ x_3=3$. (3 т.)

***Решение***

***I начин*** $(x+1)(x-2)(x+3)+(x-1)(x+3)(x-5)+(x+3)(x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+3)\left[(x+1)(x-2)+(x-1)(x-5)+(x-2)(x-3)\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)\left(x^2-x-2+x^2-6x+5+x^2-5x+6\right)=0 \Leftrightarrow (x+3)\left(3x^2-12x+9\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x+3)\left(x^2-4x+3\right)=0 \Leftrightarrow 3(x+3)(x-1)(x-3)=0\,.$$

Корените на равнението са $x_1=-3,\ x_2=1,\ x_3=3.$

***II начин:*** Преобразуваме лявата страна на уравнението и получаваме еквивалентното уравнение:

$$3x^3-3x^2-27x+27=0 \Leftrightarrow 3\left(x^3-x^2-9x+9\right)=0\,|:3 \Leftrightarrow x^2(x-1)-9(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-9\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x-3)=0\,.$$

Корените на уравнението са $x_1=-3,\ x_2=1,\ x_3=3.$

**27. Критерии за оценяване**

1. Записване на точните квадрати, по-малки от 100, на естествените числа. (2 т.)

2. Отхвърляне на числата 1 (01), 4 (04) и 9 (09). (1 т.)

3. Определяне на 6-те възможни двуцифрени числа (точни квадрати), които заемат първите 2 позиции на кода. (1т.)

4. Определяне на възможностите за наредба на неизползваните 8 цифри на трета и четвърта позиция в кода – $V_8^2 = 8.7 = 56$. (4 т.)

4. Правилен извод за пресмятане на опитите като произведение от 6 възможности за първите 2 цифри и 56 възможности за вторите две цифри (6.56) . (1 т.)

5. Получаване на правилния максимален брой 336 опита за отваряне на сейфа . (1 т.)

***Решение***

Точните квадрати, по-малки от 100, на естествени числа, са: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 и 81.

Тъй като кодът не започва с нула, не може първите две цифри да са квадратите на 1, 2 и 3 $\left(1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9\right)$, т.е. наредбата 01.., 04.. , или 09.. е невъзможна.

Двуцифрените числа, които са точни квадрати и могат да са първите две цифри на шифъра, са: 16, 25, 36, 49, 64 и 81.

Възможностите за цифрите на десетиците и на единиците, които се избират измежду останалите 8 цифри, неангажирани за първите 2 позиции, са $V_8^2 = 8.7 = 56$ на брой.

Следователно максималният брой опити за отваряне на сейфа е $6.56 = 336$.

**28. Критерии за оценяване**

**1.** За намиране на $AD = \dfrac{a}{3}$ и $DB = \dfrac{2a}{3}$. (1 т.).

2. За намиране на $AC = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (2 т.)

3. За намиране на $BC = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (2 т.)

***I начин на продължение на решението***

4. За извода, че $\sphericalangle ABC = 30°$. (1т.)

5. За намиране на $\sphericalangle CDB = 60°, \sphericalangle DCB = 90°$ или $CD = \frac{a}{3}$. (2 т.)

6. За извода, че $R = \frac{1}{2} DB$ или изразяване на $R$ чрез $CD$ от $\triangle CDB$. (1 т.)

7. За верен отговор $R = \frac{a}{3}$. (1 т.)

***II начин на продължение на решението***

4. За извода, че $\sphericalangle ABC = 30°$. (1т.)

5. За намиране на $\overset{\frown}{CD} = 60°$. (1 т.)

6. За намиране на $\overset{\frown}{CB} = 120°$. (1 т.)

7. За намиране на $\overset{\frown}{DCB} = 180°$. (1 т.)

8. За извода, че $DB = 2R$, $R = \frac{DB}{2} = \frac{a}{3}$. (1 т.)

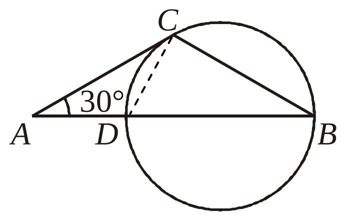
***III начин на продължение на решението***

4. За намиране на $CD = \frac{a}{3}$. (2 т.)

5. За доказване, че $\triangle BCD$ е правоъгълен. (2 т.)

6. За извода, че $DB = 2R$, $R = \frac{DB}{2} = \frac{a}{3}$. (1 т.)

***Решение***




От даденото съотношение $AD : DB = 1 : 2$ следва, че $AD = \frac{a}{3}$ и

$DB = \frac{2a}{3}$.

За допирателната $AC$ и секущата $AB$ имаме $AC^2 = AB.AD = a.\frac{a}{3}$, откъдето получаваме,

че $AC = a\frac{\sqrt{3}}{3}$. **(**От подобните триъгълници $\triangle ACD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$**,**

$\Rightarrow AC^2 = AB.AD = a.\frac{a}{3}$ $AC = a\frac{\sqrt{3}}{3}$).

От косинусова теорема за $\triangle ABC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 30^\circ$ получаваме, че $BC = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

***I начин на продължение на решението***

Следователно $AC = BC$ и $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Следователно

$\overset{\frown}{CD} = 60^\circ, \sphericalangle ACD = 30^\circ, \sphericalangle CDB = 60^\circ$. Оттук следва, че $\sphericalangle DCB = 90^\circ \Rightarrow DB = 2R, R = \dfrac{a}{3}$.

Или от косинусова теорема за $ADC$: $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD.AC.\cos 30^\circ$, $CD = \dfrac{a}{3}$.

От синусова теорема за $\triangle CDB$ : $\dfrac{CD}{\sin 30^\circ} = 2R$, $R = \dfrac{a}{3}$.

***II начин на продължение на решението***

Следователно $AC = BC$ и $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Оттук следва, че $\overset{\frown}{CD} = 2\sphericalangle ABC = 60^\circ$.

От $\sphericalangle CAB = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 2\sphericalangle CAB + \overset{\frown}{CD}$, откъдето $\overset{\frown}{CB} = 120^\circ$ и следователно

$\overset{\frown}{DCB} = 180^\circ$ и $DB$ е диаметър. Оттук $DB = 2R$, $R = \dfrac{DB}{2} = \dfrac{a}{3}$ .

***III начин на продължение на решението***

От косинусова теорема за $ADC$: $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD.AC.\cos 30^\circ$, $CD = \dfrac{a}{3}$.

От равенството $BD^2 = CD^2 + BC^2$ $\left(\dfrac{4a^2}{9} = \dfrac{a^2}{9} + \dfrac{3a^2}{9}\right)$ следва, че $\triangle BCD$ е правоъгълен и $\sphericalangle BCD = 90^\circ$, а $DB$ е диаметър, откъдето $DB = 2R$, $R = \dfrac{DB}{2} = \dfrac{a}{3}$.