<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

28.08.2015 г. – <u>ВАРИАНТ 2</u>

<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>

1. Кое е най-малкото от посочените числа?

А) $2\sqrt{13}$ **Б)** $4\sqrt{3}$ **В)** $3\sqrt{5}$ **Г)** $5\sqrt{2}$

2. За $a=-2$ **и** $b=2$ **стойността на израза** a^b-b^a **е:**

А) $-\frac{17}{4}$ **Б)** $-\frac{15}{4}$ **В)** $\frac{15}{4}$ **Г)** $\frac{17}{4}$

3. Всички допустими стойности на израза $\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x}$ **са:**

А) $x\in[1;+\infty)$ **Б)** $x\neq 0; x\neq 2$

В) $x\in[1;2)\cup(2;+\infty)$ **Г)** $x\in(1;2)\cup(2;+\infty)$

4. Решенията на неравенството $x^2-10x+25\leq 0$ **са:**

А) $x\in\varnothing$ **Б)** $x\in\{5\}$ **В)** $x\in[0;\,5]$ **Г)** $x\in(-\infty;\,+\infty)$

5. Стойността на израза $\lg\frac{1}{10}+\log_3 81-\log_{\frac{1}{2}} 8+\log_5 5$ **е равна на:**

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 7

6. Върхът на параболата $y = x^2 - 3x + 4$ **е точката с координати:**

А) $\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right)$ **Б)** $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ **В)** $(3; 4)$ **Г)** $\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right)$

7. Кое от квадратните уравнения има реални корени с различни знаци?

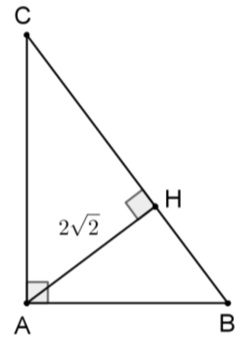
А) $-3x^2 - 4x + 1 = 0$ **Б)** $3x^2 - 4x + 1 = 0$

В) $3x^2 + 4x + 1 = 0$ **Г)** $4x^2 + 3x + 1 = 0$

8. Ако $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ **, то стойността на израза** $\sin(180° - \alpha).\mathrm{tg}(90° + \alpha)$ **е:**

А) $\frac{12}{13}$ **Б)** $\frac{5}{13}$ **В)** $-\frac{5}{13}$ **Г)** $-\frac{12}{13}$

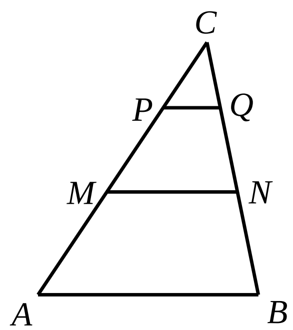
9. Даден е правоъгълен $\triangle ABC\ (\sphericalangle CAB = 90°)$ **с височина** $AH = 2\sqrt{2}$ cm**.**
Ако $BH = 2\,\mathrm{cm}$**, то радиусът на описаната около** $\triangle ABC$ **окръжност е:**



А) $\sqrt{2}$ cm **Б)** 2 cm

В) 2,5 cm **Г)** 3 cm

10. Точките M **и** P **са от страната** AC **на** $\triangle ABC$ **и** $AM : MP : PC = 5 : 4 : 3$**. Точките** N **и** Q **са от страната** BC**, като** $PQ \parallel MN$, $MN \parallel AB$ **и** $QN = 6$ cm**. Дължината на страната** BC **е:**



А) 16 cm **Б)** 18 cm

В) 20 cm **Г)** 24 cm

11. Ако x_1 **и** x_2 **са реалните корени на уравнението** $x^2 + 6x + 3 = 0$**, стойността на израза**

$x_1 x_2 (x_1 + x_2) - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$ **е равна на:**

А) -20 **Б)** -16 **В)** 16 **Г)** 2

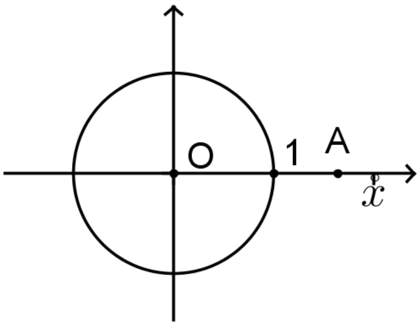
12. Първият член на безкрайна числова редица е $a_1 = 1$. Ако членовете на редицата са нечетни числа, то за всяко естествено число $n \geq 2$ те се получават по формулата:

А) $a_n = 3a_{n-1} + 1$ **Б)** $a_n = 4 + a_{n-1}$ **В)** $a_n = a_{n-1} - 1$ **Г)** $a_n = a_{n-1} + n$

13. За крайната аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ е дадено, че $a_1 = 13,\ \ a_2 = 9$ и сумата на членовете ѝ е $S_n = -27$. Броят n на членовете на прогресията е:

А) 8 **Б)** 9 **В)** 10 **Г)** 11

14. Ако за $\sphericalangle AOB$ е дадено, че върхът му е точката O на чертежа, лъчът $\overrightarrow{OA}$ съвпада с положителната посока на оста Ox и $cotg\sphericalangle AOB = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, то лъчът $\overrightarrow{OB}$ лежи:



А) само във II квадрант **Б)** в I или в III квадрант

В) във II или в IV квадрант **Г)** само в IV квадрант

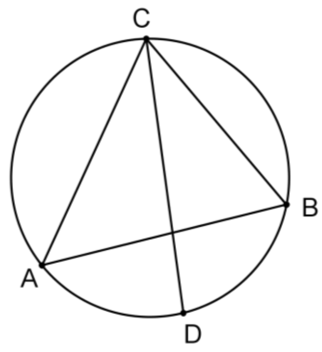
15. Три момчета и две момичета са наредени в редица, като първо са наредени момчетата, а до тях – момичетата. Броят на възможните наредби е:

А) $3!.2!$ **Б)** $3! + 2!$ **В)** $5!$ **Г)** $2!.3!.2$

16. В клас от 30 ученици двама завършили първия срок с двойки по математика, 6 имали тройки, 7 – четворки, 9 – петици и 6 били с шестици. Медианата на статистическия ред от данните за оценките на всички ученици в класа е:

А) $4{,}5$ **Б)** 5 **В)** 7 **Г)** 9

17. На чертежа остроъгълният $\triangle ABC$ е със страна $AB = 3\,\text{cm}$ и е вписан в окръжност с радиус $\sqrt{3}\,\text{cm}$. Ако точка D е средата на дъгата AB, то $\sphericalangle ACD$ е равен на:



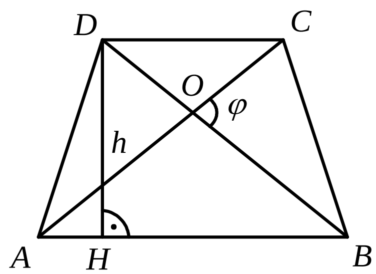
А) 60° **Б)** 45°

В) 30° **Г)** 15°

18. Даден е $\triangle ABC$, за който $AB = 15\sqrt{2}\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$ и $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 135^\circ$. Дължината на страната BC е равна на:

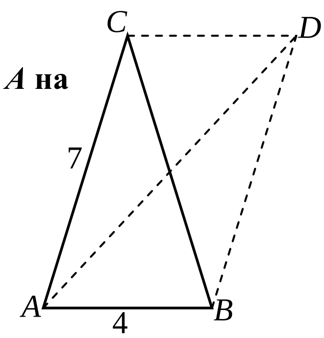
А) 23 cm **Б)** 17 cm **В)** 16 cm **Г)** 7 cm

19. Лицето на равнобедрен трапец $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ с височина $DH = h$ и $\sphericalangle BOC = \varphi$ $(O = AC \cap BD)$ е равно на:



А) $\dfrac{h^2}{2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}$ **Б)** $h^2\cos\dfrac{\varphi}{2}$ **В)** $h^2\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ **Г)** $h^2\operatorname{cotg}\dfrac{\varphi}{2}$

20. Равнобедреният $\triangle ABC$ с основа $AB = 4\,\text{cm}$ и бедро $AC = 7\,\text{cm}$ е допълнен до успоредник $ABDC$. Разстоянието от точката D до върха A на триъгълника е равно на:

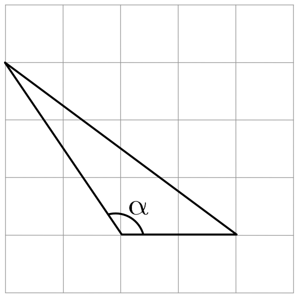


А) 8 cm **Б)** 9 cm **В)** $9\sqrt{2}$ cm **Г)** 10 cm

<u>Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

21. Намерете корените на уравнението $\sqrt{x^2 + 4x - 9} = 2x - 4$.

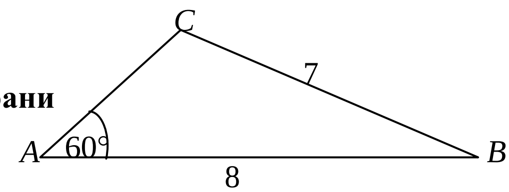
22. Като използвате квадратната мрежа, намерете стойността на $tg\alpha$.



23. Гражданин депозирал в банка 5000 лв. **при сложна годишна лихва. Намерете лихвения процент, ако след две години сумата нараснала на** 5202 лв.

24. В успоредника $ABCD$ **е построена ъглополовящата** $AL\left(L \in DC\right)$ **на** $\sphericalangle DAB$**. Правата** BL **пресича правата** AD **в точка** P**, като** D **е между точките** A **и** P**, а** $PD : AD = 2:5$**. Намерете отношението на лицата** $S_{\triangle DLP} : S_{ABLD}$ **.**

25. Намерете периметъра на тъпоъгълен $\triangle ABC$ **със страни** $AB = 8$**,** $BC = 7$ **и** $\sphericalangle A = 60°$**.**



<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

26. Решете системата $\left|\begin{array}{l} 3\dfrac{x}{y} + 8\dfrac{y}{x} = 10 \\ -2x^2 + 2y + 3y^2 = 1 \end{array}\right.$ **.**

27. Каква е вероятността трицифрено число, без повтарящи се цифри, записано с цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, **да се дели на** 5**?**

28. Да се намери периметърът на равнобедрен триъгълник, ако основата му е 8cm **и радиусът на вписаната в него окръжност е** $2\sqrt{2}\,\text{cm}$**.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\quad D=b^2-4ac \quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\quad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x \quad a^{\log_a b}=b \quad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d \quad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1} \quad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{cotg}\,\alpha$	$-\mathrm{cotg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
cotg	$-\mathrm{cotg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{cotg}\,\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\mathrm{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{cotg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\beta\mp1}{\mathrm{cotg}\,\beta\pm\mathrm{cotg}\,\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

$$\mathrm{cotg}\,2\alpha=\frac{\mathrm{cotg}^2\,\alpha-1}{2\,\mathrm{cotg}\,\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+cos\beta=2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$