

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

27.05.2014 г. – ВАРИАНТ 1

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Кое е най-голямото от посочените числа?

- А) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ Б) $2^{\frac{1}{2}}$ В) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ Г) $\log_2 \frac{1}{2}$

2. За $a = \sqrt{2}$ стойността на израза $\frac{(-a)^{-5} \cdot a^6}{-a^{-4} \cdot a^3}$ е равна на:

- А) -2 Б) $-\sqrt{2}$ В) $\sqrt{2}$ Г) 2

3. Дефиниционното множество на израза $\frac{x}{\sqrt{7-x}}$ е:

- А) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 7)$ Б) $x \in (7; +\infty)$
В) $x \in [7; +\infty)$ Г) $x \in (-\infty; 7)$

4. Множеството от решенията на неравенството $\frac{2}{x-2} \leq 1$ е:

- А) $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$ Б) $(-\infty; 2) \cup [4; +\infty)$
В) $(2; 4]$ Г) $[2; 4]$

5. Ако $\log_a 16 = 2$, то числото a е равно на:

- А) -4 Б) 4 В) 8 Г) 16

6. Сборът от корените на уравнението $\sqrt{6-5x} = x$ е равен на:

- А) -5 Б) 1 В) 5 Г) 6

7. Ако x_1 и x_2 са реалните корени на уравнението $x^2 - 6x + 7 = 0$, то стойността на израза

$A = \frac{x_1}{2} - x_1 x_2 + \frac{x_2}{2}$ е равна на:

- А) -10 Б) -8 В) -4 Г) -1

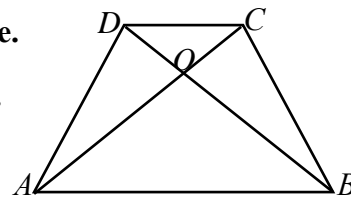
8. Числената стойност на израза $\cos 335^\circ + \sin 295^\circ - \cos 315^\circ$ е:

- А) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ В) $2\sin 25^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}$ Г) $2\cos 25^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}$

9. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) O е пресечната точка на диагоналите.

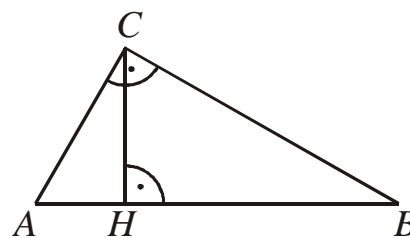
Ако $AB = 3CD$ и $OC = 3$ cm, намерете дължината на диагонала AC .

- А) 6 cm Б) 9 cm
В) 12 cm Г) 18 cm



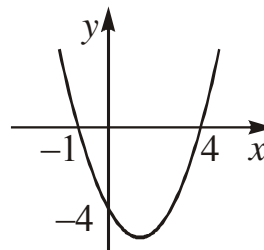
10. В правоъгълния $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) петата на височината CH дели хипотенузата AB на отсечки AH и BH , като $AH : BH = 1 : 4$. Котангенсът на $\sphericalangle CAB$ е равен на:

- А) 4 Б) 2 В) $\frac{1}{2}$ Г) $\frac{1}{4}$



11. Графиката на коя от функциите е изобразена на чертежа?

- А) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$ Б) $f(x) = x^2 + 3x - 4$
В) $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ Г) $f(x) = x^2 - 3x - 4$



12. За членовете на числовата редица с общ член a_n , $n \in \mathbb{N}$ са в сила равенствата

$a_3 = 8$, $a_2 = 3a_1$ и $a_3 = 4a_2$. Първият член на редицата е:

- А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{2}{3}$ В) $\frac{3}{2}$ Г) 213

13. За геометричната прогресия a_1, a_2, a_3, \dots е изпълнено

$$\begin{cases} a_1 - a_3 = 30 \\ a_4 - a_2 = -\frac{15}{2} \end{cases}$$

Първият член a_1 и частното q са съответно равни на:

- А) 32 и $\frac{1}{4}$ Б) 32 и $-\frac{1}{4}$ В) -32 и $\frac{1}{4}$ Г) -32 и $-\frac{1}{4}$

14. Най-голямата стойност на израза $3\cos 5x + 1$ е:

- А) -2 Б) $\frac{8}{3}$ В) 4 Г) 6

15. Сумата на осем числа е A . Едно от числата е 8 и е заменено с числото 24. Средноаритметичното на новите осем числа е:

- А) $3A$ Б) $\frac{A}{3}$ В) $\frac{A}{8} + 3$ Г) $\frac{A}{8} + 2$

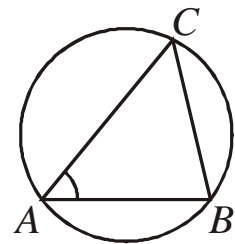
16. В един магазин всички стоки имат осемцифрен код с различни и неповтарящи се цифри, като всеки код започва с 2014. Колко най-много стоки може да има в този магазин?

- А) V_6^4 Б) V_{10}^4 В) C_{10}^4 Г) C_4^6

17. Остръгълният $\triangle ABC$ е вписан в окръжност с радиус $R = 3$ cm.

Ако $AB = 3\sqrt{3}$ cm и $\sphericalangle BAC = 45^\circ$, то мярката на $\sphericalangle ABC$ е:

- А) 30° Б) 45° В) 60° Г) 75°



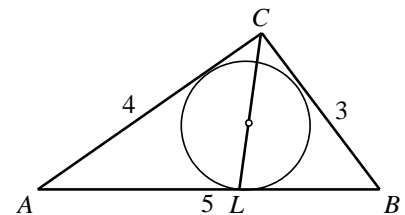
18. На чертежа $\triangle ABC$ е със страни $AC = 4$ cm, $BC = 3$ cm и

$AB = 5$ cm. Отсечката CL минава през центъра на вписаната

в $\triangle ABC$ окръжност. Дължината на CL е:

- А) $\frac{7\sqrt{2}}{12}$ cm Б) $\frac{12\sqrt{2}}{7}$ cm

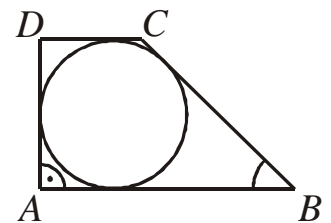
- В) $12\sqrt{2}$ cm Г) $14\sqrt{2}$ cm



19. Правогълният трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е описан около

окръжност с радиус 3 cm. Ако $\sphericalangle ABC = 30^\circ$, то лицето на трапеца е:

- А) 27 cm^2 Б) 36 cm^2 В) 48 cm^2 Г) 54 cm^2

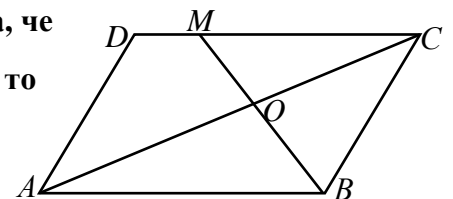


20. В успоредника $ABCD$ точка M лежи на страната CD така, че

$DM : DC = 2 : 7$. Ако $AC \cap BM = O$ и лицето на $\triangle MOC = 50 \text{ cm}^2$, то

лицето на $\triangle ABO$ е равно на:

- А) $\frac{450}{7} \text{ cm}^2$ Б) 70 cm^2 В) 98 cm^2 Г) 140 cm^2



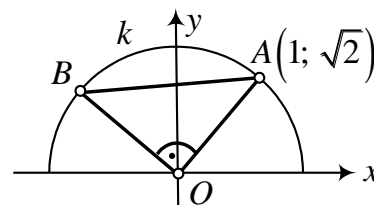
Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. За $\cotg \alpha = -\frac{1}{5}$ намерете стойността на израза $\frac{5 \cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha + 10 \cos \alpha}$.

22. Намерете корените на уравнението $\sqrt{8 + 2x - x^2} = 2x + 1$.

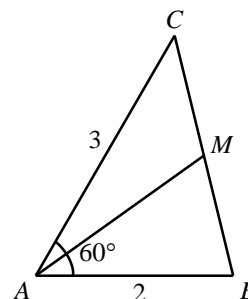
23. Гражданин депозирал 6000 лв. в банка на годишен срочен влог. След една година сумата нараснала на 6 240 лв. Колко лева ще стане депозитът на гражданина след още една година?

24. В правоъгълна координатна система xOy е построена полуокръжност k с център O , разположена над абсцисната ос. Върху k са избрани точки $A(1; \sqrt{2})$ и B така, че $\sphericalangle AOB = 90^\circ$.



Намерете дължината на хордата AB .

25. В $\triangle ABC$ $AB = 2 \text{ dm}$ $AC = 3 \text{ dm}$ и $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Намерете медианата AM ($M \in BC$) на триъгълника.



Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Да се реши уравнението $\frac{x+1}{2x^2-5x+2} + \frac{2x+1}{2x^2+x-1} = \frac{1}{x-2}$.

27. Сумата от първите три члена на геометрична прогресия е равна на 70. Ако към втория член добавим 5, ще се получат три числа, които са последователни членове на аритметична прогресия. Намерете двете прогресии.

28. През върха C на правоъгълния $\triangle ABC$ с катети $AC = 6$ и $BC = 6\sqrt{2}$ е построена права m , перпендикулярна на медианата AP ($P \in BC$). Намерете дължината на отсечката MN , където M и N са общите точки на m съответно с AP и AB .

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{при } D \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$
$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{при } a \geq 0, k \geq 2, n \geq 2 \text{ и } m, n, k \in \mathbb{N}$$
$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 1$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Вероятност за настъпване на събитието A :

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Формула за медиана:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \quad m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = pr \quad S = \frac{abc}{4R}$$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin \alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
$\alpha \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$