

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23.05.2013 Г. – ВАРИАНТ 1

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Най-малко е числото:

- А) $\left(\frac{7}{6}\right)^2$ Б) 1 В) $\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ Г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

2. Стойността на израза $\frac{x+3}{x^2-9} - \frac{1}{x-3} + \frac{x-2013}{x+3}$ за $x = 2013$ е равна на:

- А) 2 Б) 1 В) 0 Г) -2013

3. Допустимите стойности на израза $\frac{\sqrt{|x|}}{x}$ са:

- А) $(-\infty; +\infty)$ Б) $[0; +\infty)$ В) $(-\infty; 0]$ Г) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

4. Числото $\log_2 3$ е корен на уравнението:

- А) $3^x = 2$ Б) $2^x = 3$ В) $3^x = \frac{1}{2}$ Г) $2^x = \frac{1}{3}$

5. На кое от уравненията сборът от реалните корени е 2,5?

- А) $2x^2 - 5x + 5 = 0$ Б) $2x^2 - 5x + 3 = 0$
В) $2x^2 - 2x + 5 = 0$ Г) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

6. Решенията на неравенството $x^2 - 2x + 3 > 0$ са:

- А) $x \in \emptyset$ Б) $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$
В) $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$ Г) $x \in (-\infty; \infty)$

7. Стойността на $\sin 240^\circ$ е:

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Б) $-\frac{1}{2}$

В) $\frac{1}{2}$

Г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) е вписана окръжност k с център O .

Лъчът $BO \rightarrow$ пресича страната AC в точка P , като $AP = 6$ cm и

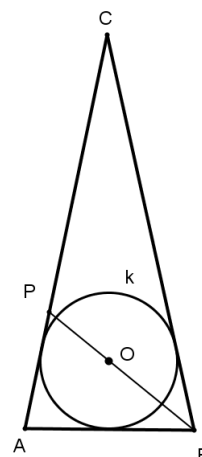
$PC = 12$ cm. Периметърът на $\triangle ABC$ е :

A) 72 cm

Б) 45 cm

В) 9 cm

Г) невъзможно да се определи



9. В $\triangle ABC$ $AB = 7$ cm, а $AC = 5$ cm. Ако $\angle ACB = 120^\circ$, то дължината на страната BC е:

A) 3 cm

Б) 6 cm

В) $\sqrt{39}$ cm

Г) 8 cm

10. Ако общият член на числова редица е $a_n = (-1)^{n+1} (n+1) - 3 \cdot (-1)^n$, то a_{13} е равен на:

A) -16

Б) -11

В) 10

Г) 17

11. Дадена е крайна геометрична прогресия с $a_1 = 729$, $q = \frac{1}{3}$ и $a_n = \frac{1}{9}$. Броят n на членовете на прогресията е:

A) 5

Б) 7

В) 8

Г) 9

12. Наредените двойки числа $(x; y)$, които са решения на системата $\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = -x \end{cases}$, са

разположени:

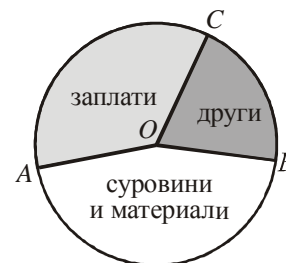
A) само в първи квадрант

Б) само в четвърти квадрант

В) във втори и в четвърти квадрант

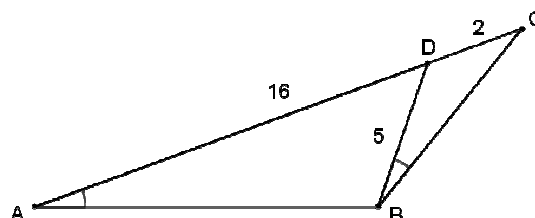
Г) в първи и в трети квадрант

13. Разходите на фирма за един месец са 18 000 лв. Тяхното разпределение е представено чрез кръговата диаграма. Ако $\angle AOB = 170^\circ$ и $\angle BOC = 64^\circ$, то разходите за заплати са:



- А) 3200 лв. Б) 6000 лв. В) 6300 лв. Г) 8500 лв.

14. На страната AC на $\triangle ABC$ е взета точка D , така че $\angle DBC = \angle CAB$. Ако $AD = 16$ cm, $DC = 2$ cm и $BD = 5$ cm, то дължината на страната AB е равна на:



- А) 6 cm Б) 15 cm В) $\frac{55}{3}$ cm Г) 36 cm

15. За $\triangle ABC$ е дадено, че $AB = 5$ и $\sin \angle CAB : \sin \angle CBA = 3 : 2$. Ако $AC^2 + BC^2 = 117$, то периметърът на триъгълника е:

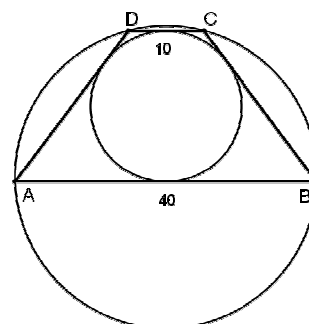
- А) 20 Б) 18 В) $5 + 3\sqrt{17}$ Г) $5 + 3\sqrt{85}$

16. Височината към хипотенузата в правоъгълен триъгълник има дължина 6 cm и сключва с един от катетите ъгъл 30° . Лицето на триъгълника е:

- А) 18 cm^2 Б) 36 cm^2 В) $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$ Г) $48\sqrt{3} \text{ cm}^2$

17. Около трапеца $ABCD$ с основи $AB = 40$ cm и $CD = 10$ cm е описана окръжност. Ако в трапеца е вписана окръжност, то дължината на нейния радиус е:

- А) 10 cm Б) 15 cm
В) 20 cm Г) друг отговор



Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Намерете корените на уравнението $x^2 - 2x = t$, където t е решение на уравнението

$$\sqrt{t+1} - \sqrt{2t-5} = 1.$$

27. Да се докаже, че ако α, β и γ са ъгли в триъгълник, то е изпълнено тъждеството

$$\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

28. В остроъгълния $\triangle ABC$ медианата AM ($M \in BC$) и височината CH ($H \in AB$) са

съответно равни на $6\sqrt{5}$ cm и 12 cm. Ако страната $BC = 20$ cm, намерете дължината на радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{при } D \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[k]{a^{mk}} = \sqrt[k]{a^m} \quad \text{при } a \geq 0, k \geq 2, n \geq 2 \text{ и } m, n, k \in \mathbb{N}$$

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 1$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Вероятност за настъпване на събитието A :

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Формула за медиана:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \quad m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = pr \quad S = \frac{abc}{4R}$$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin \alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
$\alpha \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$