

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА**

**ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО**

**МАТЕМАТИКА**

**31.08.2012 Г. – ВАРИАНТ 2**

*Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!*

**1. Числото  $x = \log_3 \frac{1}{81}$  е от интервала:**

- А)  $(3; +\infty)$       Б)  $(-\infty; -3)$       В)  $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$       Г)  $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$

**2. Стойността на  $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$  е:**

- А)  $-\sqrt{6}$       Б)  $\sqrt{6}$       В) 6      Г)  $12 - \sqrt{6}$

**3. Ако  $x_1$  и  $x_2$  са корените на уравнението  $2x^2 + 3x - 20 = 0$ , а  $b = x_1 \cdot x_2$  и  $c = x_1 + x_2$ , то уравнението  $x^2 + bx + c = 0$  е:**

- А)  $x^2 - \frac{3}{2}x - 10 = 0$       Б)  $x^2 + \frac{3}{2}x - 10 = 0$       В)  $x^2 - 10x + \frac{3}{2} = 0$       Г)  $x^2 - 10x - \frac{3}{2} = 0$

**4. Множеството от решенията на неравенството  $(2x - 3)^2 > 1$  е:**

- А)  $(1; 2)$       Б)  $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}; +\infty\right)$       В)  $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$       Г)  $(-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$

**5. Допустимите стойности на израза  $\frac{\sqrt[4]{-x^2 y^3}}{\sqrt{xy}}$  са:**

- А)  $x < 0, y < 0$       Б)  $x < 0, y > 0$       В)  $x > 0, y < 0$       Г)  $x > 0, y > 0$

**6. Броят на различните корени на уравнението  $x^2 + 2|x| = 0$  е:**

- А) 0      Б) 1      В) 2      Г) 3

7. Стойността на израза  $A = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha + \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ , ако  $\alpha = 30^\circ$ , е:

- А)  $-\sqrt{2}$       Б)  $\frac{-2\sin 15^\circ}{\sqrt{3}}$       В)  $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$       Г)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$

8. Неравенството  $a^{\frac{1}{6}} < a^{\frac{1}{7}}$  е вярно, когато:

- А)  $a < 0$       Б)  $0 < a < 1$       В)  $a = 1$       Г)  $a > 1$

9. Дадена е числова редица с формула за общия член  $a_n = -n^2 + 8n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Най-големият от първите пет члена е с номер:

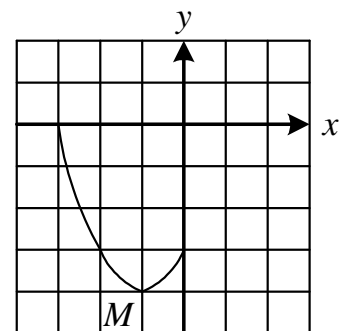
- А) 5      Б) 4      В) 3      Г) 2

10. Ако средноаритметичното на числата  $a, b, c, d, p$  и  $q$  е 3, а средноаритметичното на числата  $a, b, c$  и  $d$  е 4, то средноаритметичното на числата  $p$  и  $q$  е:

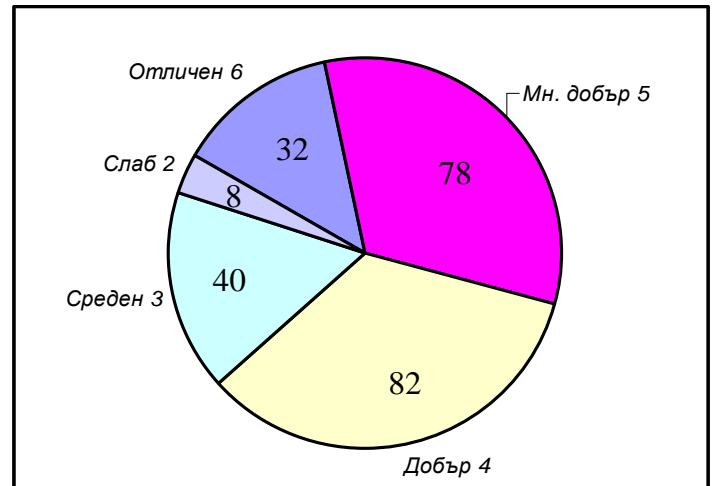
- А) 1      Б) 2      В) 2,5      Г) 3,5

11. На чертежа е показана част от графиката на квадратна функция. Ако точката  $M(-1; -4)$  е върхът на параболата, то тази графика ще пресече за втори път абсцисната ос в точката с координати:

- А)  $(0,5; 0)$       Б)  $(1; 0)$       В)  $(2; 0)$       Г)  $(3; 0)$

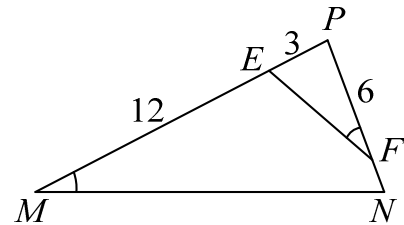


12. В края на учебната година за успеха на ученици са получени резултатите, отразени на кръговата диаграма. Определете мярката на централния ъгъл на сектора, отразяващ броя на учениците, получили оценка *Мн. добър 5*.



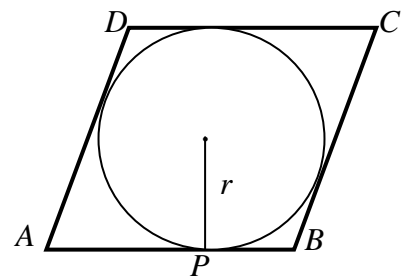
- А)  $52^\circ$                       Б)  $117^\circ$   
 В)  $130^\circ$                     Г)  $156^\circ$

13. На чертежа  $\angle PMN = \angle EFP$ ,  $ME = 12$ ,  $EP = 3$  и  $PF = 6$ . Отношението  $EF : MN$  е равно на:



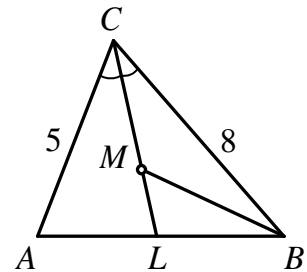
- А) 1 : 2      Б) 2 : 3      В) 1 : 4      Г) 2 : 5

14. Вписаната в ромба  $ABCD$  окръжност се допира до страната  $AB$  в точка  $P$ . Ако радиусът на окръжността е  $r = 12 \text{ mm}$  и  $AP = 16 \text{ mm}$ , то периметърът на ромба е:



- А) 5 cm      Б) 6,7 cm      В) 7,6 cm      Г) 10 cm

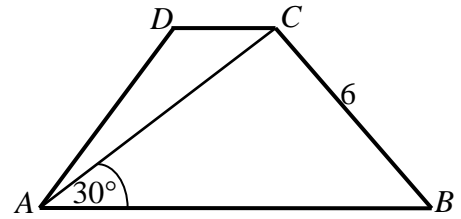
15. В  $\triangle ABC$  със страни  $AC = 5 \text{ cm}$  и  $BC = 8 \text{ cm}$  отсечката  $CL$  ( $L \in AB$ ) е ъглополовящата на  $\angle ACB$ . Ъглополовящата на  $\angle ABC$  пресича  $CL$  в точка  $M$ , като я дели в отношение  $CM : ML = 2 : 1$ . Дължината на страната  $AB$  е равна на:



- А) 6 cm      Б) 6,5 cm      В) 7,5 cm      Г) 8 cm

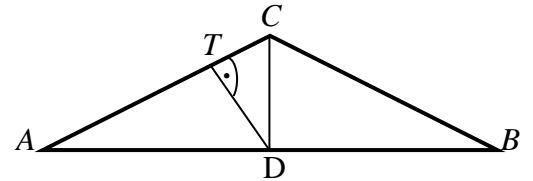
16. Трапецът  $ABCD$  е равнобедрен с бедро  $BC = 6$  cm и  $\angle BAC = 2\angle CAD = 30^\circ$ . Диагоналът на трапеца е:

- А) 6 cm    Б)  $6\sqrt{2}$  cm    В)  $6\sqrt{3}$  cm    Г) 9 cm



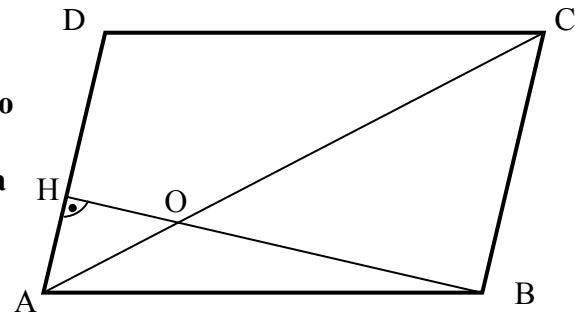
17. На чертежа е даден равнобедреният  $\triangle ABC$ , за който основата  $AB = 16$  cm и  $S_{\triangle ABC} = 48$  cm<sup>2</sup>. Ако точката  $D$  е средата на  $AB$  и  $DT \perp AC$  ( $T \in AC$ ), то дължината на  $AT$  е:

- А) 3,6 cm    Б) 4,8 cm    В) 6,4 cm    Г) 8 cm



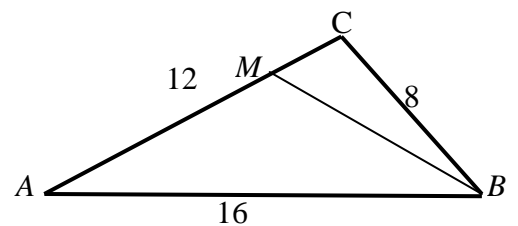
18. Даден е успоредник  $ABCD$ . Височината  $BH$  ( $H \in AD$ ) пресича диагонала  $AC$  в точка  $O$  и  $AO:OC = 1:4$ . Ако лицето на  $\triangle AOH = 3$  cm<sup>2</sup>, то лицето на успоредника  $ABCD$  е равно на:

- А) 60 cm<sup>2</sup>    Б) 96 cm<sup>2</sup>    В) 120 cm<sup>2</sup>    Г) 128 cm<sup>2</sup>



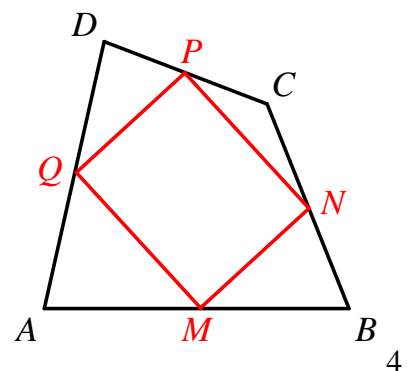
19. За  $\triangle ABC$  на чертежа  $AC = 12$ ,  $AB = 16$ ,  $BC = 8$  и точка  $M \in AC$ , като  $MA:MC = 3:1$ . Дължината на  $BM$  е:

- А)  $\sqrt{337}$     Б)  $\sqrt{85}$     В)  $\sqrt{61}$     Г)  $\sqrt{55}$



20. Точките  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$  са средите съответно на страните  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  на четириъгълника  $ABCD$ , а  $MNPQ$  е правоъгълник с лице 12 cm<sup>2</sup>. Лицето на  $ABCD$  е равно на:

- А) 18 cm<sup>2</sup>    Б) 24 cm<sup>2</sup>    В) 36 cm<sup>2</sup>    Г) 48 cm<sup>2</sup>



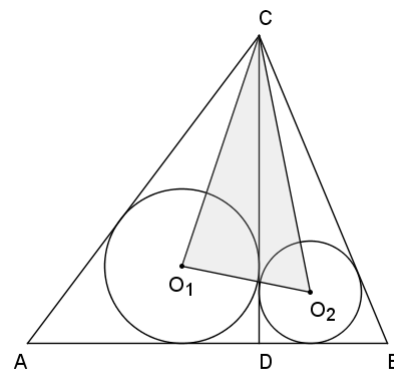
Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Пресметнете числото  $\log_a \frac{9}{4}$ , ако  $a$  е корен на уравнението  $(a-1)(3a-2)=0$ .
22. Намерете сбора от реалните корени на уравнението  $\sqrt{2x^2+2}+2x^2+2=6$ .
23. В правоъгълна координатна система с мерна единица 1 cm са построени графиките на функциите  $f(x)=x^2+x-34$  и  $g(x)=2x-4$ , а  $M$  е обща точка на двете графики и лежи в първи квадрант. Намерете разстоянието в сантиметри от точка  $M$  до началото на координатната система.
24. При записване на всичките 300 различни данни от проведен експеримент се оказало, че числата в подредения статистически ред образуват аритметична прогресия, като най-малкото от тях е 2, а най-голямото е 799. Намерете медианата на тази извадка.
25. Отсечката  $CH$  ( $H \in AB$ ) е височина в  $\triangle ABC$  и  $CH:AC:BC=3:4:5$ . Триъгълникът е вписан в окръжност с радиус  $R=\sqrt{3}$  cm. Намерете сбора от дължините на страните  $AC$  и  $BC$ .

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. За членовете на аритметична прогресия  $a_1, a_2, a_3, \dots$  и растяща геометрична прогресия  $b_1, b_2, b_3, \dots$  са в сила равенствата:  $a_1=b_1, a_2=b_2+1, a_3=b_3-1$  и  $b_1+b_2+b_3=21$ . Намерете броя  $n$  на членовете на аритметичната прогресия, ако тяхната сума  $S_n=55$ .
27. С помощта на цифрите 0, 1, 2 и 3 са записани всички трицифрени числа с различни цифри и по случаен начин е избрано едно от тях. Каква е вероятността това число да се дели на 3?

28. На чертежа  $CD$  ( $D \in AB$ ) е височина към страната  $AB$  в  $\triangle ABC$ . Точките  $O_1$  и  $O_2$  са центровете на вписаните съответно в  $\triangle ACD$  и  $\triangle BCD$  окръжности. Дължините на  $AD, BD$  и  $CD$  са съответно 9cm, 5cm и 12cm. Да се намери дължината на  $O_1O_2$  и радиусът на описаната около триъгълника  $O_1O_2C$  окръжност.



## ФОРМУЛИ

### Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{при } D \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

### Квадратна функция

Графиката на  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  е парабола с връх точката  $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

### Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[k]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{при } a \geq 0, k \geq 2, n \geq 2 \text{ и } m, n, k \in \mathbb{N}$$

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 1$$

### Комбинаторика

Брой на пермутациите на  $n$  елемента:  $P_n = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Брой на вариациите на  $n$  елемента  $k$ -ти клас:  $V_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на  $n$  елемента  $k$ -ти клас:  $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Вероятност за настъпване на събитието  $A$ :

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

### Прогресии

Аритметична прогресия:  $a_n = a_1 + (n-1)d$   $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрична прогресия:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$   $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

Формула за сложна лихва:  $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

### Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник:  $c^2 = a^2 + b^2$      $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$      $a^2 = a_1c$      $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$      $r = \frac{a+b-c}{2}$      $\sin \alpha = \frac{a}{c}$      $\cos \alpha = \frac{b}{c}$      $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$      $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$      $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$      $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$      $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$      $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$      $m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

Формула за ъглополовяща:  $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$      $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник:  $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

### Формули за лице

Триъгълник:  $S = \frac{1}{2}ch_c$      $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$      $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$      $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник:  $S = ah_a$      $S = ab \sin \alpha$     Трапец:  $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник:  $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник:  $S = pr$

### Тригонометрични функции

$\alpha^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\alpha$ rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$