

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23.05.2012 Г. – ВАРИАНТ 1

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Кое от числата принадлежи на интервала $[-1; 1]$?

- А) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ Б) $7^{-1.49}$ В) $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ Г) $625^{\frac{1}{4}}$

2. Числената стойност на израза $\sqrt{\sqrt{625}-\sqrt{81}}$ е равна на:

- А) 16 Б) $2^4\sqrt{34}$ В) 4 Г) $\sqrt{34}$

3. Допустимите стойности на израза $\frac{3+x}{\sqrt{3-x}} + \frac{1}{3x}$ са:

- А) $x \in (-\infty; 3)$ Б) $x \in (-\infty; 3]$ В) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$ Г) $x \in (3; \infty)$

4. Решенията на неравенството $\frac{x^2-4}{2x} \geq 0$ са:

- А) $(-\infty; -2] \cup [2; \infty)$ Б) $(-\infty; -2] \cup (0; 2]$
В) $[-2; 0] \cup [2; \infty)$ Г) $[-2; 0) \cup [2; \infty)$

5. Равенството $\frac{1}{4} \cdot 6^{\log_6 x} = x - 6$ е вярно за x равно на:

- А) -8 Б) 4,8 В) $7\frac{1}{2}$ Г) 8

6. За корените x_1 и x_2 на уравнението $-0,5x^2 + 22,5x - 2 = 0$ е вярно, че:

- А) $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$ Б) $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$
В) $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$ Г) $x_1 = -x_2$

7. Два от корените на уравнението $ax^4 + bx^2 + c = 0$ са $-\frac{1}{3}$ и 2. Другите му корени са:

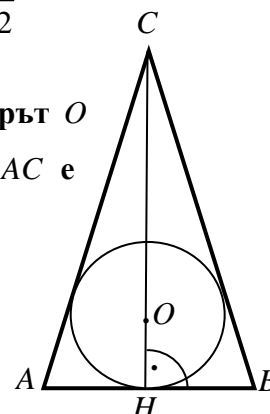
- А) $-\frac{1}{2}$ и 3 Б) $-\frac{2}{3}$ В) -2 Г) -2 и $\frac{1}{3}$

8. За $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ стойността на израза $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha$ е:

- А) $-\frac{3}{2}$ Б) $-\frac{1}{2}$ В) $\frac{1}{2}$ Г) $\frac{3}{2}$

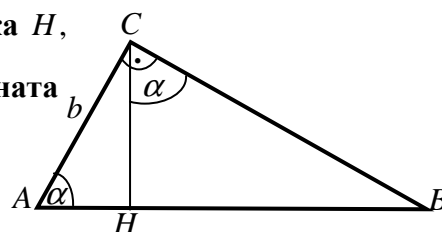
9. В равнобедрен $\triangle ABC$ с основа $AB = 8$ cm е вписана окръжност. Центърът O на окръжността дели височината CH в отношение $5:2$. Дължината на AC е равна на:

- А) 6 cm Б) 10 cm В) 16 cm Г) 20 cm



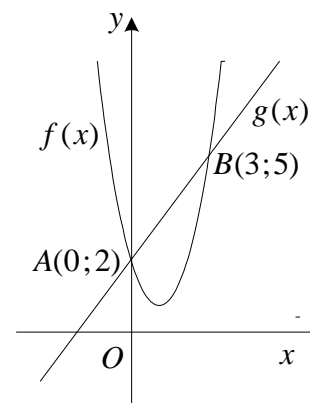
10. Върху хипотенузата AB на правоъгълния $\triangle ABC$ е взета точка H , така че $\angle HCB = \angle CAB = \alpha$. Ако $AC = b$, то диаметърът на описаната окръжност около $\triangle HCB$ е равен на:

- А) $b \cdot \sin \alpha$ Б) $b \cdot \cos \alpha$ В) $b \cdot \operatorname{tg} \alpha$ Г) $\frac{1}{2} b \cdot \operatorname{tg} \alpha$



11. На чертежа са построени графиките съответно на квадратната функция $f(x)$ и на линейната функция $g(x)$. Тези графики се пресичат в точките $A(0;2)$ и $B(3;5)$. Решенията на неравенството $f(x) > g(x)$ са числата от интервала:

- А) $(-\infty; 0)$ Б) $(0; 3)$
 В) $(-\infty; 0) \cup (3; \infty)$ Г) $(3; \infty)$



12. Коя от формулите задава общия член a_n , $n \in \mathbb{N}$ на редицата на всички естествени числа, които при деление на 3 дават остатък 2?

- А) $a_n = 3n + 2$ Б) $a_n = 3n - 1$ В) $a_n = 3n - 2$ Г) $a_n = n^2 + 1$

13. Ако за аритметична прогресия е известно, че $a_2 + a_6 = 3$ и сборът на първите 13 члена е равен на 26, то намерете разликата на прогресията.

- А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{1}{3}$ В) 1 Г) 6

14. Клоун разполага с 2 различни панталона, 3 вида ризи, 5 различни маски за лице и 2 перуки в различен цвят. По колко различни начини той може да избере комплект от панталон, риза, маска и перука за едно представление пред публика?

- А) 12 Б) 24 В) 30 Г) 60

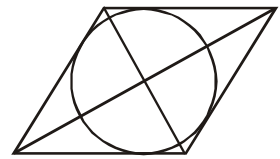
15. В таблицата са дадени измерените температури на 25.04.2012 г. в 12 часа на обяд в няколко български града. С колко градуса се различава модата от средната стойност на температурите в статистическия ред от данни?

t° (измерена температура по C)	10°	15°	20°	25°
n (брой градове с t° по C)	3	4	1	2

- А) с 1° Б) с 4° В) с 6° Г) с 11°

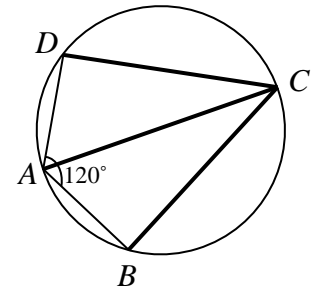
16. Страната на ромб е 12 cm и острият му ъгъл е 60°. Радиусът на вписаната в ромба окръжност е равен на:

- А) 3 cm Б) $3\sqrt{3}$ cm В) 6 cm Г) $6\sqrt{3}$ cm



17. Четириъгълникът ABCD е вписан в окръжност и $\angle DAB = 120^{\circ}$. Ако $BD = 12$ cm и $\angle ABC = \angle ADC$, то диагоналят AC е равен на:

- А) $8\sqrt{3}$ cm Б) $8\sqrt{2}$ cm В) $6\sqrt{3}$ cm Г) $4\sqrt{3}$ cm



18. Даден е $\triangle ABC$, за който $AC = 3$ cm, $BC = 6$ cm и $\angle ACB = 120^{\circ}$. Дължината на ъглополовящата CL ($L \in AB$) е:

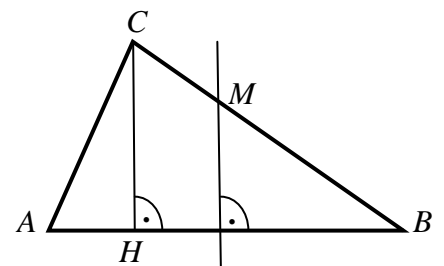
- А) 2 cm Б) 3 cm В) $2\sqrt{3}$ cm Г) $2\sqrt{7}$ cm

19. Трапецът ABCD ($AB \parallel CD$) със страни $AB = 10$, $BC = 7$, $CD = 4$ и $AD = 5$ е с лице, равно на:

- А) $2\sqrt{6}$ Б) $6\sqrt{6}$ В) $14\sqrt{6}$ Г) $42\sqrt{6}$

20. В $\triangle ABC$ симетралата на страната AB пресича страната BC в точка M така, че $BM : CM = 5 : 2$. Ако CH ($H \in AB$) е височина в $\triangle ABC$, намерете отношението $AH : HB$.

- А) 1:5 Б) 3:5 В) 3:7 Г) 2:7



Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Намерете стойността на израза $\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 (1 + \sin \alpha)^{-1}$, ако $\sin \alpha \neq -1$.

22. Да се реши уравнението $\sqrt{2x^2 - x - 2} = -x$.

23. Даден е изпъкнал n -ъгълник. Броят на всички отсечки с краища измежду върховете му е 45. Да се намери броят n на върховете на многоъгълника.

24. Група младежи решили да изпратят писма по Интернет с пожелания за късмет. Първия ден всеки от тях изпратил пожелания на петима свои приятели. Втория ден всеки от получените пожеланието го препратил на други петима свои приятели и т.н., като всеки, получил пожелание предния ден, препращал пожеланието на петима свои приятели следващия ден. При тези условия в края на петия ден броят на изпратените пожелания бил 12500. Колко са младежите от групата, започнали инициативата?

25. Намерете лицето на правоъгълен триъгълник с хипотенуза 5 cm и сбор от дължините на катетите 6 cm.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. За допустимите стойности на x докажете тъждеството

$$\left(\frac{1}{\cos 2x} - \operatorname{tg} 2x\right)(\sin x + \cos x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

27. Краищата на отсечка $AB = 3$ cm са центрове на две окръжности, като радиусът на окръжността с център A е по-малък от радиуса на окръжността с център B . Радиусите са избрани случайно от пет отсечки с дължини 1 cm, 2 cm, 4 cm, 5 cm и 9 cm. Намерете броя на възможностите двете окръжности да имат поне една обща точка и вероятността построените окръжности да имат две общи точки?

28. Четириъгълникът $ABCD$ със страна $BC = 7$ е вписан в окръжност с диаметър 25 и център точката O , която лежи на страната AB . Лицето на $\triangle ACD$ е равно на 108. Да се намерят лицето и периметърът на четириъгълника.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{при } D \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{k}}} \quad \text{при } a \geq 0, k \geq 2, n \geq 2 \text{ и } m, n, k \in \mathbb{N}$$

$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 0$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Вероятност за настъпване на събитието A :

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$ $m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin \alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$