

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО  
МАТЕМАТИКА

1 септември 2011 г. – Вариант 1

*Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!*

1. Дадени са числата  $a = 2^{-\frac{1}{2}}$ ,  $b = (-9)^{\frac{1}{3}}$ ,  $c = \operatorname{tg} 135^\circ$ . Колко от неравенствата

$b < c$ ,  $a \leq b$ ,  $a < c$  НЕ са верни?

А) 0                      Б) 1                      В) 2                      Г) 3

2. Числата  $A = 2 - \sqrt{3}$  и  $B = 2 + \sqrt{3}$  са:

А) равни                      Б) реципрочни  
В) рационални              Г) противоположни

3. Недопустимите стойности на променливата  $y$  в израза  $\left(\frac{1}{y^2} - 1\right) : \left(\frac{1}{y} + 1\right)$  са

числата:

А) 0                      Б) 0 ; 1                      В) -1 ; 0                      Г) -1 ; 0 ; 1

4. Решенията на неравенството  $1 + \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} > 0$  са:

А)  $x \in \left(-2; \frac{3}{2}\right)$                       Б)  $x \in \left(-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

В)  $x \in (-2; +\infty)$                       Г)  $x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

5. Корените на уравнението  $x^2 + 3x - 2 = 0$  са означени с  $x_1$  и  $x_2$ . Стойността на израза  $x_1(x_2 - 3) + x_2(x_1 - 3)$  е:

А) -5                      Б) 0                      В) 5                      Г) 13

6. За  $x \in [-2; 0]$ , най-малката стойност на функцията  $f(x) = 3x^2 - 12x + 4$  е:

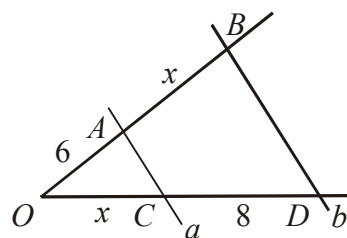
- А) -8                      Б) 4                      В) 8                      Г) 40

7. Броят на решенията на уравнението  $\sqrt{3-x} = -\sqrt{x-3}$  е:

- А) 0                      Б) 1                      В) 2                      Г) безброй много

8. На чертежа правите  $a$  и  $b$  са успоредни, като  $OA = 6$ ,  $CD = 8$ ,  $OC = AB = x$ . Стойността на  $x$  е:

- А)  $2\sqrt{2}$                       Б)  $2\sqrt{3}$   
В) 4                      Г)  $4\sqrt{3}$

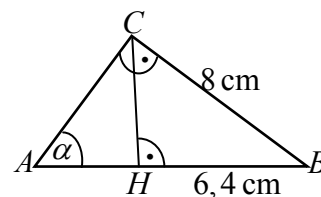


9. Стойността на израза  $\cos 390^\circ - \sin 210^\circ$  е:

- А)  $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$                       Б) 0                      В) 1                      Г)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

10. На чертежа  $CH$  е височина към хипотенузата  $AB$  на правоъгълния  $\triangle ABC$ . Ако  $BC = 8$  cm, а  $BH = 6,4$  cm, то  $\operatorname{tg} \alpha$  е равен на:

- А)  $\frac{4}{3}$                       Б)  $\frac{4}{5}$                       В)  $\frac{3}{4}$                       Г)  $\frac{3}{5}$



11. Сборът на четвъртия и десетия член на аритметична прогресия е равен на 4. Сумата от първите 13 члена на тази прогресия е:

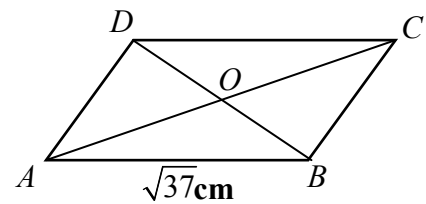
- А) 52                      Б) 50                      В) 26                      Г) 25

12. От три фолклорни групи с 4, 6 и 10 участници трябва да се избере един солист. По колко различни начина може да стане това?

- А) 10                      Б) 20                      В) 24                      Г) 240



19. В успоредника  $ABCD$   $AB = \sqrt{37}$  см,  $AC = 8$  см и  $BD = 6$  см. Дължината на страната  $BC$  е равна на:



- А)  $10\sqrt{3}$  см                      Б)  $\sqrt{37}$  см  
 В)  $\sqrt{13}$  см                        Г)  $\sqrt{10}$  см

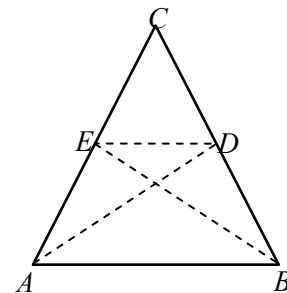
20. В равнобедрен трапец височината е равна на 6 см, а диагоналите му са взаимно перпендикулярни. Лицето на трапеца е равно на:

- А)  $36 \text{ cm}^2$                       Б)  $36\sqrt{2} \text{ cm}^2$                       В)  $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$                       Г)  $36\sqrt{5} \text{ cm}^2$

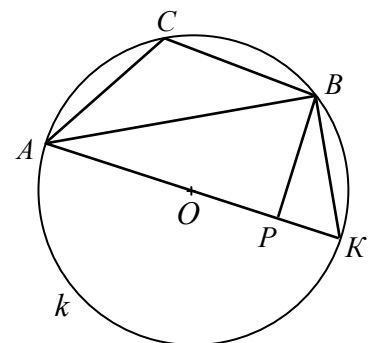
Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Намерете стойностите на  $x$ , за които е изпълнено равенството  $\log_{\frac{1}{25}} x = -\frac{1}{2}$ .

22. В равнобедрения  $\triangle ABC$  ( $AC = BC$ ) са построени ъглополовящите  $AD$  и  $BE$ . В четириъгълника  $ABDE$   $AB = 13$ , а  $BD = 5$ . Намерете косинуса на ъгъла при основата на  $\triangle ABC$ .



23. На чертежа трапецът  $AKBC$  е вписан в окръжност  $k$  с диаметър  $AK$ . Ако  $\angle ACB = 120^\circ$  и  $BP \perp AK$  ( $P \in AK$ ), то намерете отношението  $AP : PK$ .



24. Намерете най-голямата стойност на израза  $\frac{1}{2} + 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ,

ако  $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$ .

**25. В таблицата са дадени резултати от тест по математика:**

Точки	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Брой ученици	1	1	1	2	2	0	2	3	1	1	4	2	3	1	2

Да се определи медианата на статистическия ред, получен от данните за резултатите от теста.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

**26. Да се реши системата уравнения:**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \frac{4}{3}xy = \frac{8}{3} \end{cases}$$

**27. С помощта на цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 са записани всички възможни трицифрени числа с различни цифри. Каква е вероятността случайно избрано число от записаните да е четно?**

**28. Даден е успоредник  $ABCD$ , в който  $AB = 3AD$ . През средата  $M$  на  $AD$  и точка  $N$  от страната  $AB$  е построена права, която пресича продължението на страната  $CB$  в точка  $Q$ . Ако  $AN = 3$  cm и  $BQ = 10$  cm, намерете периметъра на успоредника.**

## ФОРМУЛИ

### Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \text{ при } D \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

### Квадратна функция

Графиката на  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  е парабола с връх точката  $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

### Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$
$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{при } a \geq 0, k \geq 2, n \geq 2 \text{ и } m, n, k \in \mathbb{N}$$
$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 0$$

### Комбинаторика

Брой на пермутациите на  $n$  елемента:  $P_n = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Брой на вариациите на  $n$  елемента  $k$ -ти клас:  $V_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на  $n$  елемента  $k$ -ти клас:  $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Вероятност за настъпване на събитието  $A$ :

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

### Прогресии

Аритметична прогресия:  $a_n = a_1 + (n-1)d$   $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрична прогресия:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$   $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

Формула за сложна лихва:  $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

### Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник:  $c^2 = a^2 + b^2$   $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$   $a^2 = a_1c$   $b^2 = b_1c$   
 $h_c^2 = a_1b_1$   $r = \frac{a+b-c}{2}$   $\sin \alpha = \frac{a}{c}$   $\cos \alpha = \frac{b}{c}$   $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$   $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Формула за медиана:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \quad m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Формула за ъглополовяща:  $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$   $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник:  $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

### Формули за лице

Триъгълник:  $S = \frac{1}{2}ch_c$   $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$   $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = pr \quad S = \frac{abc}{4R}$$

Успоредник:  $S = ah_a$   $S = ab \sin \alpha$  Трапец:  $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник:  $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник:  $S = pr$

### Тригонометрични функции

$\alpha^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\alpha \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$