ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23 май 2011 г. – <u>Вариант 1</u>

УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,

Тестът съдържа **28 задачи** по математика от **два вида**:

- 20 задачи със структуриран отговор с четири възможни отговора, от които само един е верен;
- 8 задачи със свободен отговор.

Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително) в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте с черен цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. За да отбележите верния отговор, зачертайте със знака кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

А ~~Б~~ В Г

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и зачертайте буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

А ● ~~В~~ Г

За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е зачертана със знака .

Отговорите на **задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.)** запишете в предоставения **свитък за свободните отговори**, като за задачи **от 26. до 28. вкл.** запишете пълните решения с необходимите обосновки.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Ако $a = \log_4 1$, $b = \left(0,5.\sqrt[3]{27}\right)^{-1}$ **и** c **е** 15% **от** 10**, посочете вярното твърдение:**

А) $a < b < c$ **Б)** $b < c < a$ **В)** $c < b < a$ **Г)** $a < b,\ b = c$

2. Стойността на израза $\dfrac{22}{3\sqrt{2} - \sqrt{7}} - \sqrt{72}$ **е:**

А) $-2\sqrt{7}$ **Б)** $\sqrt{2} - 2\sqrt{7}$ **В)** $2\sqrt{7}$ **Г)** $\sqrt{2} + 2\sqrt{7}$

3. Ако x_1 **и** x_2 **са корените на уравнението** $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = -0,25 - 2x$ **и** $x_1 > x_2$**, то** $\dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$ **е равно на:**

А) -2 **Б)** -1 **В)** 0 **Г)** 1

4. Решенията на неравенството $\dfrac{1 - 2x}{x + 2} \le 0$ са:

А) $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ **Б)** $x \in \left[-2; \dfrac{1}{2}\right]$ **В)** $x \in \left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$ **Г)** $x \in (-\infty; -2) \cup \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

5. **Допустимите стойности за израза** $\dfrac{2}{3x^2 + 2x} : \dfrac{2 - 2x}{(3x + 2)(x + 1)}$ **са:**

А) $x \ne 0,\ x \ne -1,\ x \ne -\dfrac{2}{3}$ **Б)** $x \ne 0,\ x \ne -1,\ x \ne 1,\ x \ne -\dfrac{2}{3}$

В) $x \ne -1,\ x \ne 1,\ x \ne -\dfrac{2}{3}$ **Г)** $x \ne -1,\ x \ne 1,\ x \ne 0$

6. Разстоянието от върха на параболата $y = x^2 + 4x + 5$ **до ординатната ос е:**

А) -2 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** $\sqrt{5}$

7. Стойността на израза $\dfrac{\sin\left(-75^\circ\right)\sin 105^\circ - \cos 105^\circ \cos 75^\circ}{2\sin 75^\circ \cos\left(-75^\circ\right)}$ **е:**

А) -2 **Б)** $-\sqrt{3}$ **В)** $\sqrt{3}$ **Г)** 2

8. Ако $x^{3,5} > x^{1,5}$**, то:**

А) $x > 1$ **Б)** $0 < x < 1$ **В)** $-1 < x < 0$ **Г)** $x = 0$

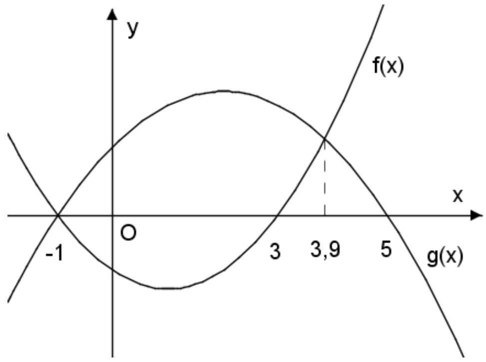
9. Първите три члена на редицата с общ член $a_n = 2n - (-1)^{n+3}$, $n = 1, 2, ...$ **са съответно:**

А) 2, 4, 6 **Б)** 1, 3, 5 **В)** 1, 5, 9 **Г)** 1, 5, 5

10. За растяща геометрична прогресия е известно, че $a_1 = 3$**,** $S_5 - S_4 = 24$**. Частното на прогресията е равно на:**

А) $-\sqrt[4]{8}$ **Б)** $-\sqrt{2}$ **В)** $\sqrt{2}$ **Г)** $\sqrt[4]{8}$

11. Кое от твърденията за графиките на чертежа НЕ е вярно?



А) Решенията на неравенството $f(x) > g(x)$ **са стойностите на** x **от интервала** $(-\infty;\ -1) \cup (3,9;\ +\infty)$.

Б) Решенията на неравенството $g(x) > 0$ **са стойностите на** x **от интервала** $(-1;\ 5)$.

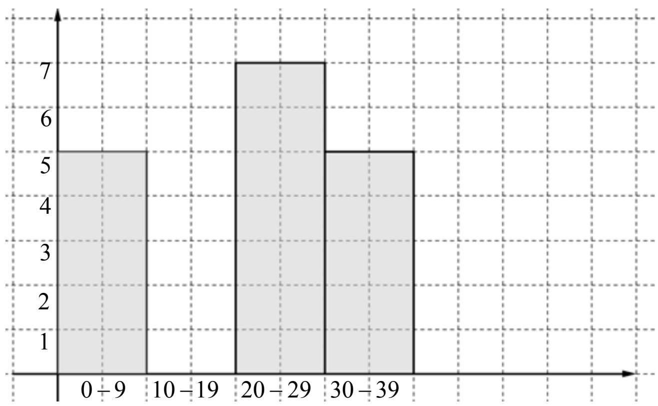
В) Решенията на неравенството $f(x) < 0$ **са стойностите на** x **от интервала** $(-1;\ 3)$.

Г) Решенията на неравенството $f(x) < g(x)$ **са стойностите на** x **от интервала** $[3,9;\ 5)$.

12. В кутия има 84 **едноцветни картона, които са бели или зелени. По случаен начин се изважда един от тях. Вероятността той да НЕ е зелен е** $\frac{3}{7}$**. Колко зелени картона има в кутията?**

А) 24 **Б)** 36 **В)** 48 **Г)** 60

13. На диаграмата е дадено разпределението по брой на 17 **числа от** 0 **до** 39**. Статистическият ред, който има такава диаграма, е:**



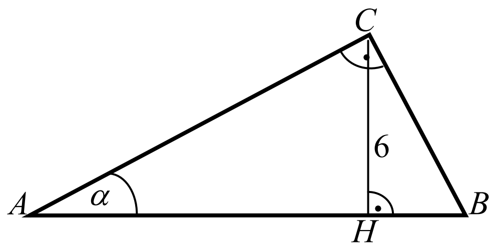
А) 1, 1, 1, 1, 9, 11, 22, 23, 24, 25, 25, 30, 30, 30, 35, 35, 35

Б) 1, 1, 2, 3, 9, 20, 20, 21, 22, 23, 25, 25, 35, 35, 35, 39, 39

В) 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 11, 12, 14, 18, 20, 20, 30, 39, 39

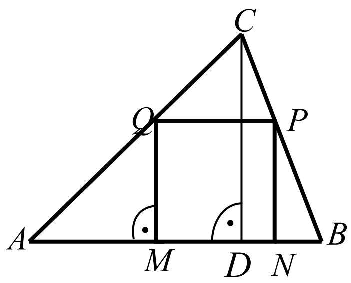
Г) 2, 3, 9, 9, 9, 20, 20, 22, 23, 29, 30, 30, 30, 31, 31, 39, 39

14. На чертежа CH **е височина в правоъгълния** $\triangle ABC\left(\angle ACB=90^\circ\right)$**. Ако** $CH=6$ **и** $\cos\angle BAC=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, **то** BC **е равна на:**



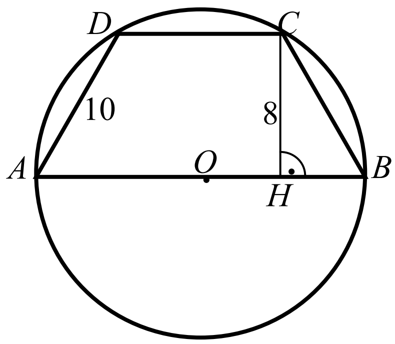
А) 30 **Б)** $3\sqrt{5}$ **В)** $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ **Г)** $\frac{6}{\sqrt{5}}$

15. В остроъгълния $\triangle ABC$ **е вписан квадратът** $MNPQ$**, както е показано на чертежа. Ако** $AB=6$**,** $CD=4$**, да се намери дължината на страната на квадрата.**



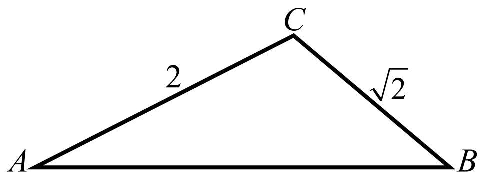
А) 1,2 **Б)** 2,4 **В)** 3 **Г)** 3,6

16. Трапецът $ABCD$ **е вписан в окръжност, като** AB **е диаметър. Ако височината на трапеца е** $CH=8$**, а бедрото** $AD=10$**, то радиусът на окръжността е:**



А) $\frac{11}{3}$ **Б)** $\frac{25}{4}$ **В)** $\frac{25}{3}$ **Г)** 12

17. Даден е $\triangle ABC$ **със страни** $AC=2$**,** $BC=\sqrt{2}$ **и лице** $S_{\triangle ABC}=1$**. Центърът** O **на описаната около триъгълника окръжност:**



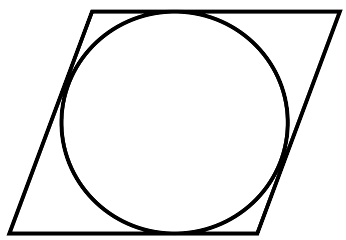
А) винаги е външна точка за $\triangle ABC$

Б) винаги е вътрешна точка за $\triangle ABC$

В) може да е външна точка за $\triangle ABC$**, може да е и вътрешна точка за** $\triangle ABC$

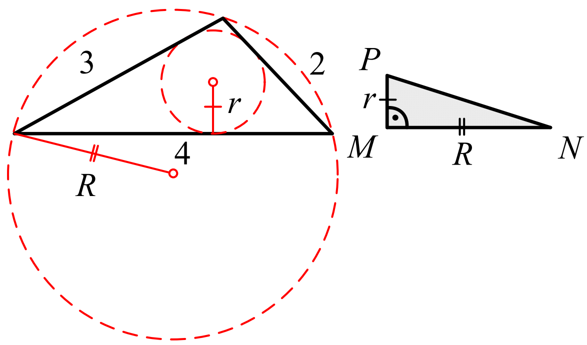
Г) винаги лежи на AB

18. Лицето на ромб е равно на 24**, а сумата от дължините на диагоналите му е равна на** 14**. Лицето на вписания в ромба кръг е равно на:**



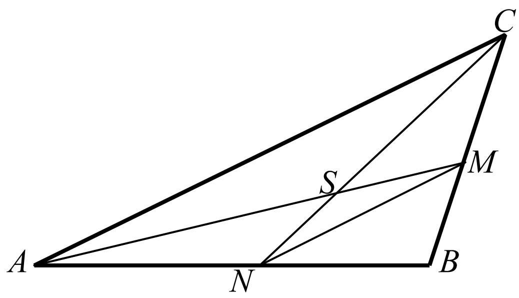
А) $2,4\pi$ **Б)** $4,8\pi$ **В)** $5,76\pi$ **Г)** $7,2\pi$

19. Страните на триъгълник са 2 **cm,** 3 **cm и** 4 **cm, а** R **и** r **са съответно радиусите на описаната и вписаната в триъгълника окръжност. Построен е правоъгълен** $\triangle MNP$ **с катети** $MN = R$ **и** $MP = r$**. Лицето на** $\triangle MNP$ **е равно на:**



А) $\frac{2}{3}$ **cm²** **Б)** $\frac{4}{3}$ **cm²** **В)** $\frac{\sqrt{15}}{12}$ **cm²** **Г)** $\frac{5}{32}$ **cm²**

20. За $\triangle ABC$ **на чертежа точка** M **е средата на** BC**, а точка** N **е средата на** AB**. Правите** AM **и** CN **се пресичат в точка** S**. Каква част от лицето на** $\triangle ABC$ **е лицето на** $\triangle MNS$**?**



А) $\frac{1}{6}$ **Б)** $\frac{1}{8}$ **В)** $\frac{1}{10}$ **Г)** $\frac{1}{12}$

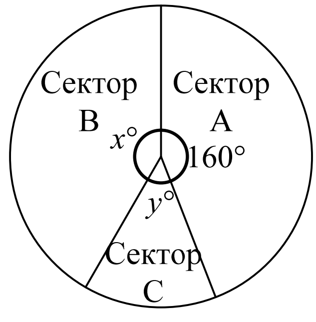
<u>Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

21. Намерете числото x**, ако** $x > 0,\ x \neq 1$ **и** $\log_x\left(\log_2 256\right) = \frac{3}{2}$**.**

22. Намерете по-малкия корен на уравнението $2\sqrt{3x-11} = x-2$.

23. За $tg\alpha = -3$ **намерете числената стойност на израза** $\mathrm{A} = \dfrac{4\sin\alpha.\cos\alpha}{17\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$.

24. Кръговата диаграма представя разпределението на зрителите в трите сектора на спортна зала. Ако в сектор A **има** 7200 **зрители и** $x : y = 3 : 1$**, то намерете броя на зрителите в сектор** B**.**



25. Точка O е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, като $AO=5$, $BO=3$ и $AB=7$. Намерете радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

26. Решете неравенството $\dfrac{2x+8}{x^2-3x-4} \geq \dfrac{x+4}{x^2+x}$ **и проверете дали числото**

$$a=\left(\frac{9^{-\frac{1}{3}}.2}{2^{-3}\left(\sqrt[3]{-6}\right).2^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1}$$

е негово решение.

27. Иво подрежда пъзел, като всеки ден подрежда с k елемента повече отколкото предния. На дванадесетия ден той подредил два пъти по-малко елементи отколкото през първите 5 дни, взети заедно. На четиринадесетия ден Иво подредил 85 елемента. От колко елемента се състои пъзелът, ако Иво успял да го подреди на шестнадесетия ден, подреждайки с k елемента повече отколкото на петнадесетия ден?

28. За успоредника $ABCD$ е дадено, че $AB=8$ cm, $AD=6$ cm и $\angle BAD=60^\circ$. Точка N е средата на CD, а точка $M \in BC$ и $BM:MC=2:1$. Правите AM и CD се пресичат в точка P, а правите BN и AD се пресичат в точка K. Намерете страните на $\triangle APK$.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0 \qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Формули на Виет $\quad x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ е парабола с връх точката $(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a})$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a| \qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$; $\quad$ при $k\in\mathbb{N}$

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$; при $\quad a>0$, $n\geq 2$, $k\geq 2$ и $n, m, k\in\mathbb{N}$

$\log_a b=x \Leftrightarrow a^x=b \qquad \log_a a^x=x \qquad a^{\log_a b}=b$; $\quad$ при $\quad b>0,\ a>0,\ a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $\quad P_n=1.2.3...(n-1)n=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $\quad V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{1.2.3...(k-1)k}$

Вероятност $\qquad P(A)=\dfrac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}} \qquad 0\leq P(A)\leq 1$

Прогресии

Аритметична прогресия: $\quad a_n=a_1+(n-1)d \qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $\quad a_n=a_1.q^{n-1} \qquad S_n=\dfrac{a_nq-a_1}{q-1}=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $\quad S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $\quad a^2 = a_1 c$ $\quad b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1.b_1$ $\quad r = \frac{a+b-c}{2}$ $\quad \sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad \mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана: $m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $\quad m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$

$m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $\quad l_c^2 = ab - nm$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $\quad S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $\quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $\quad S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $\quad S = ab\sin\alpha$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^0-\alpha$	$90^0+\alpha$	$180^0-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{cotg}\alpha$	$-\mathrm{cotg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
cotg	$-\mathrm{cotg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta} \qquad \mathrm{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{cotg}\alpha\mathrm{cotg}\beta\mp1}{\mathrm{cotg}\beta\pm\mathrm{cotg}\alpha}$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \qquad \mathrm{cotg}2\alpha=\frac{\mathrm{cotg}^2\alpha-1}{2\mathrm{cotg}\alpha} \qquad \sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha) \qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big) \qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$