



ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО  
МАТЕМАТИКА

18 май 2010 г. – Вариант 1



**УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,**


Тестът съдържа **28** задачи.

Първите **20** задачи (от **1.** до **20.** включително) в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте с черен цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. За да отбележите верния отговор, зачертайте със знака  кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

(A)  (B) (Г)

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и зачертайте буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

(A)   (Г)

За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е зачертана със знака  .

Отговорите на задачите със свободен отговор (от **21.** до **28.** вкл.) запишете в предоставения **свитък за свободните отговори**, като за задачи от **26.** до **28.** вкл. запишете пълните решения с необходимите обосновки.

Чертежите в теста са само за илюстрация. Те не са начертани в мащаб и не са предназначени за директно измерване на дължини на страни и мерки на ъгли.

**ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!**

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Дадени са числата  $a = \frac{49^{\frac{1}{2}}}{16}$ ,  $b = \left(\frac{16}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $c = \frac{7}{4}$ . Колко от неравенствата

$a \geq c$ ,  $a > b$ ,  $b > c$  НЕ са верни?

А) 0                                      Б) 1                                      В) 2                                      Г) 3

2. Числата  $A = \sqrt{2} - 1$  и  $B = \sqrt{2} + 1$  са:

А) равни                                      Б) реципрочни  
В) рационални                              Г) противоположни

3. Изразът  $\frac{x+3}{y+1} : \frac{x^2+x-6}{y^2-1}$  е тъждествено равен на  $\frac{y-1}{x-2}$  при:

А)  $y \neq \pm 1$                               Б)  $y \neq -1, x \neq -3$                               В)  $x \neq 2, x \neq -3$                               Г)  $x \neq -3, x \neq 2, y \neq \pm 1$

4. Решенията на неравенството  $\frac{-x^2+6x-8}{x^2-16} \geq 0$  са:

А)  $x \in (-\infty; -4] \cup (2; +\infty)$                               Б)  $x \in (-4; 2) \cup [2; 4]$                               В)  $x \in [2; 4)$                               Г)  $x \in (-4; 2]$

5. Дадено е уравнението  $x^2 - 3x - 5 = 0$  с корени  $x_1$  и  $x_2$ . Стойността на израза  $x_1(x_2 - 2) + x_2(x_1 - 2)$  е равна на:

А) -16                                      Б) -7                                      В) 4                                      Г) 16

6. За  $x \in [-1; 1]$ , най-голямата стойност на функцията  $f(x) = 1 + 4x - x^2$  е:

А) -4                                      Б) 1                                      В) 4                                      Г) 5

7. Броят на решенията на уравнението  $\sqrt{2-x} = \sqrt{x-2}$  е:

А) 0                                      Б) 1                                      В) 2                                      Г) безброй много

8. Стойността на израза  $\log_3 9 - (\log_3 3^{-1})^2 + \frac{1}{2} \log_9 \frac{1}{81}$  е:

А) 3                                      Б) 2                                      В) 1                                      Г) 0

9. Стойността на израза  $\cos 330^\circ - \sin 510^\circ$  е:

А)  $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$                                       Б) 0                                      В)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$                                       Г) 1

10. Ако  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1}{5}$ , то  $\cot \alpha$  е равен на:

- А) 5                                      Б) 2                                      В) 1                                      Г) 0,2

11. За аритметична прогресия  $a_4 = -\frac{1}{2}$ , а  $a_{11} = 3$ . Разликата на прогресията е:

- А)  $-\frac{1}{2}$                                       Б)  $-\frac{5}{14}$                                       В)  $\frac{5}{14}$                                       Г)  $\frac{1}{2}$

12. По колко начина могат да се изберат три учебни предмета от ЗИП от пет възможни?

- А) 3                                      Б) 6                                      В) 10                                      Г) 15

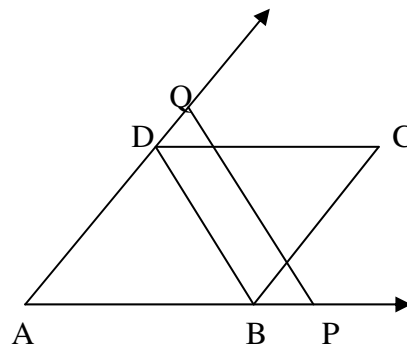
13. Кое от равенствата НЕ е вярно, ако  $a > 0$ , а  $b < 0$ ?

- А)  $4a^4b^4 = a^2\sqrt{16a^4b^8}$                       Б)  $a^2b = \sqrt{a^4b^2}$   
 В)  $\sqrt{8ab^2} = 2|b|\sqrt{2a}$                       Г)  $3\sqrt{2a^2b^4} = \sqrt{18ab^2}$

14. На чертежа  $ABCD$  е успоредник и  $PQ \parallel BD$ . Ако

$AB = 8$  см,  $BC = 6$  см и  $AP = 12$  см, то дължината на  $DQ$  е:

- А) 1,5 см                                      Б) 2 см  
 В) 3 см                                      Г) 4 см

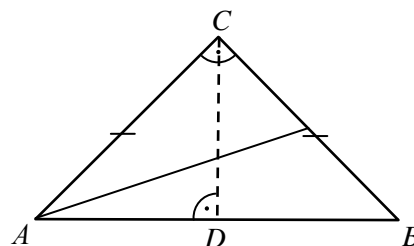


15. Страните на триъгълник са  $BC = 27$  см,  $AC = 36$  см и  $AB = 21$  см. Намерете отношението, в което центърът на вписаната окръжност дели ъглополовящата  $CL(L \in AB)$ , считано от точка  $C$ .

- А) 2:1                                      Б) 1:2                                      В) 4:1                                      Г) 3:1

16. Триъгълникът  $ABC$  на чертежа е равнобедрен и правоъгълен. Дължината на медианата към катета е  $\sqrt{10}$ . Дължината на височината  $CD$  към хипотенузата е:

- А)  $\sqrt{2}$                                       Б) 2                                      В)  $2\sqrt{2}$                                       Г) 4



17. Триъгълникът  $ABC$  е със страна  $BC = 6$  и  $\sphericalangle BAC = 150^\circ$ . Дължината на окръжността, описана около триъгълника е:

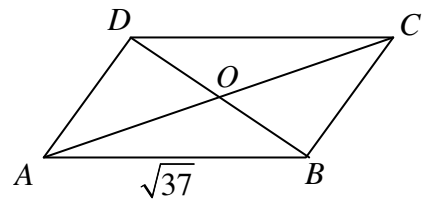
- А)  $6\pi$                       Б)  $12\pi$                       В)  $\frac{6\sqrt{3}}{3}\pi$                       Г)  $6\sqrt{3}\pi$

18. Триъгълник  $ABC$  има страни  $AB = 7$ ,  $BC = 3$  и  $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ . Видът на  $\triangle ABC$  е:

- А) остроъгълен              Б) правоъгълен              В) тъпоъгълен              Г) неопределен

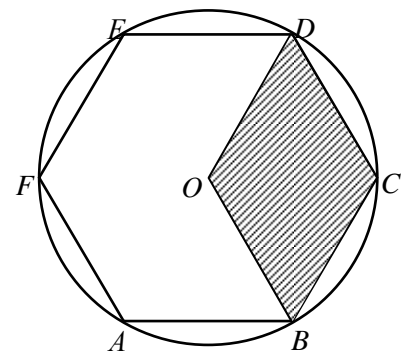
19. В успоредника  $ABCD$   $AB = \sqrt{37}$ ,  $AC = 8$  и  $BD = 6$ . Острият ъгъл между диагоналите на успоредника е:

- А)  $15^\circ$               Б)  $30^\circ$               В)  $45^\circ$               Г)  $60^\circ$



20. Даден е правилен шестоъгълник  $ABCDEF$ . Ако точката  $O$  е центърът на описаната около шестоъгълника окръжност с радиус 2, то  $S_{OBCD}$  е равно на:

- А)  $4\sqrt{3}$   
 Б)  $2\sqrt{3}$   
 В)  $\sqrt{3}$   
 Г)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$



Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

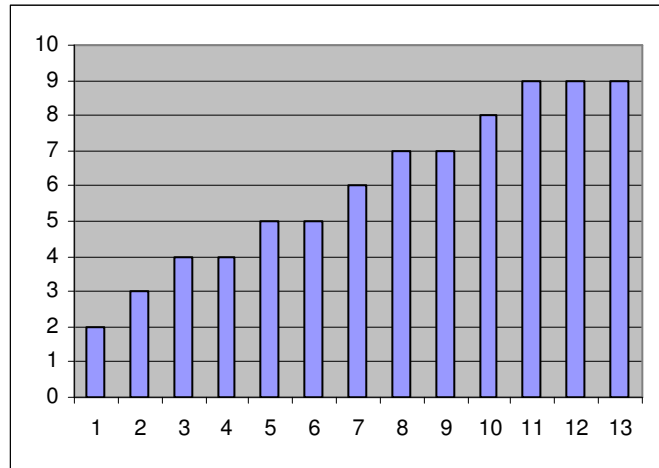
21. Намерете за кои стойности на  $x$  е изпълнено равенството  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8^{-\frac{1}{3}}$ .

22. В равнобедрен триъгълник с основа 4 и бедро 6 ъглополовящите на ъглите при основата пресичат бедрата в точки  $P$  и  $Q$ . Да се намери дължината на отсечката  $PQ$ .

23. Даден е трапец  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), за който  $AB = 28$  см,  $CD = 11$  см,  $BC = 26$  см и  $AD = 25$  см. Да се намери лицето на трапеца.

24. Намерете най-малката стойност на израза  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 2$ , ако  $\alpha \in [0^\circ; 90^\circ]$ .

25. Да се намери средната стойност на множеството от данни, представено с диаграмата:



Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Да се намерят решенията на системата 
$$\begin{cases} x \cdot y = 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

27. С помощта на цифрите 0, 2, 5, 6 и 7 са записани всички четирицифрени числа по-малки от 6000. По случаен начин се избира едно число. Да се намери вероятността числото да се дели на 5.

28. В окръжност с радиус 3 е вписан четириъгълник  $ABCD$ , чийто диагонал  $AC$  е диаметър на окръжността. Ако  $\sphericalangle DAC : \sphericalangle CAB = 5 : 2$  и  $AB = 3\sqrt{3}$ , да се намери диагоналът  $BD$ .

## ФОРМУЛИ

### Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{Формули на Виет} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

### Квадратна функция

Графиката на  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  е парабола с връх точката  $(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a})$

### Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a; \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{k}}}; \quad \text{при } a > 0, n \geq 2, k \geq 2 \text{ и } n, m, k \in \mathbb{N}$$

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad \log_a a^x = x \quad a^{\log_a b} = b; \quad \text{при } b > 0, a > 0, a \neq 1$$

### Комбинаторика

Брой на пермутациите на  $n$  елемента:  $P_n = 1.2.3 \dots (n-1)n = n!$

Брой на вариациите на  $n$  елемента  $k$ -ти клас:  $V_n^k = n.(n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на  $n$  елемента  $k$ -ти клас:  $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n.(n-1) \dots (n-k+1)}{1.2.3 \dots (k-1)k}$

Вероятност  $P(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

### Прогресии

Аритметична прогресия:  $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Геометрична прогресия:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

Формула за сложна лихва:  $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

### Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник:  $c^2 = a^2 + b^2$     $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$     $a^2 = a_1c$     $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$     $r = \frac{a+b-c}{2}$     $\sin \alpha = \frac{a}{c}$     $\cos \alpha = \frac{b}{c}$     $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$     $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$     $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$     $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

Формула за медиана:  $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$     $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$

$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

Формула за ъглополовяща:  $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$     $l_c^2 = ab - nm$

### Формули за лице

Триъгълник:  $S = \frac{1}{2}ch_c$     $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$     $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$     $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник:  $S = ah_a$     $S = ab \sin \alpha$

Четириъгълник:  $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник:  $S = pr$

### Тригонометрични функции

| $\alpha^0$                   | $0^0$ | $30^0$               | $45^0$               | $60^0$               | $90^0$          |
|------------------------------|-------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\alpha$ rad                 | 0     | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin \alpha$                | 0     | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos \alpha$                | 1     | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\operatorname{tg} \alpha$   | 0     | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | –               |
| $\operatorname{cotg} \alpha$ | –     | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               |

|      | $-\alpha$                     | $90^\circ - \alpha$          | $90^\circ + \alpha$           | $180^\circ - \alpha$          |
|------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| sin  | $-\sin \alpha$                | $\cos \alpha$                | $\cos \alpha$                 | $\sin \alpha$                 |
| cos  | $\cos \alpha$                 | $\sin \alpha$                | $-\sin \alpha$                | $-\cos \alpha$                |
| tg   | $-\operatorname{tg} \alpha$   | $\operatorname{cotg} \alpha$ | $-\operatorname{cotg} \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$   |
| cotg | $-\operatorname{cotg} \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$   | $-\operatorname{tg} \alpha$   | $-\operatorname{cotg} \alpha$ |

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$