

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО  
МАТЕМАТИКА

2 септември 2009 г. – Вариант 1

*УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,*

Тестът съдържа **28 задачи** по математика от два вида:

- 20 задачи със структуриран отговор с четири възможни отговора, от които само един е верен;
- 8 задачи със свободен отговор.

**Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително)** в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте със син/черен цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. Отбелязвайте верния отговор със знака **X** в кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

(A)    ~~(B)~~    (C)    (D)

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и отбележете буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

(A)    ●    ~~(B)~~    (D)

**За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е отбелязана със знака X.**

Отговорите на задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.) запишете в предоставения свитък за свободните отговори, като за задачи от 26. до 28. вкл. запишете пълните решения с необходимите обосновки.

***ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!***

Отговорите на задачите от 1. до 20. вкл. отбелязвайте в листа за отговори!

1. Кое от посочените числа е най-малко?

А)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$       Б)  $\left(\frac{4}{3}\right)^3$       В)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$       Г)  $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

2. Стойността на израза  $\sqrt{17^2 - 8^2} - \sqrt{(-2)^6} - \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2$  е:

А) 25      Б) 21      В) 9      Г) 5

3. Ако  $x \neq y$  и  $y \neq 0$ , то изразът  $\frac{x}{y^2 - xy} + \frac{1}{x - y}$  е еквивалентен на:

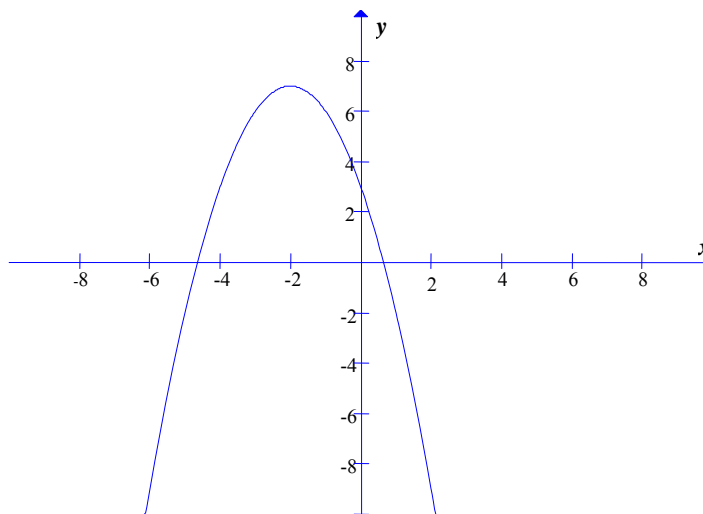
А)  $\frac{x+y}{y(x-y)}$       Б)  $\frac{x+1}{y(x-y)}$       В)  $-\frac{1}{y}$       Г)  $\frac{1}{y}$

4. Кое от уравненията има корени с различни знаци и положителният корен има по-голяма абсолютна стойност от отрицателния?

А)  $x^2 + 7x + 5 = 0$       Б)  $-x^2 + 2x + 3 = 0$       В)  $x^2 + 2x - 3 = 0$       Г)  $-2x^2 + 4x - 3 = 0$

5. Графиката на коя от посочените функции е показана на чертежа?

А)  $y = -x^2 - 4x + 3$   
Б)  $y = -x^2 - 4x - 3$   
В)  $y = -x^2 + 4x + 3$   
Г)  $y = x^2 + 4x - 3$



6. Допустимите стойности на израза

$\frac{\sqrt[6]{-x^4 y^5}}{\sqrt[4]{x^3 y}}$  са:

А)  $x \leq 0, y \leq 0$       Б)  $x < 0, y < 0$       В)  $x \leq 0, y \geq 0$       Г)  $x > 0, y > 0$

7. Стойността на израза  $6^{1+\log_6 20}$  е:

А) 6      Б) 20      В) 120      Г) 26

8. Решенията на неравенството  $2x^2 - 3x + 1 > 0$  са:

- А)  $x \in (-\infty; 0,5) \cup (1; +\infty)$                       Б)  $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$   
 В)  $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$                       Г)  $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

9. За функциите  $f(x) = x^4 - 1$  и  $g(x) = \cos^3 x + 1$  е вярно:

- А)  $f(x)$  е четна, а  $g(x)$  - нечетна                      Б)  $f(x)$  и  $g(x)$  са нито четни, нито нечетни  
 В)  $f(x)$  и  $g(x)$  са нечетни                      Г)  $f(x)$  и  $g(x)$  са четни

10. Стойността на израза  $\cos 58^\circ \cos 28^\circ + \cos 32^\circ \cos 62^\circ$  е:

- А)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$                       Б) 1                      В)  $\frac{1}{2}$                       Г)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. За аритметична прогресия  $a_1, a_2, \dots, a_9$  е известно, че  $a_5 = 4$ . Сумата  $S_9$  на първите 9 члена на прогресията е равна на:

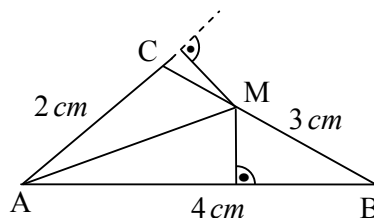
- А) 72                      Б) 36                      В) 18                      Г) 9

12. За статистическия ред 3,1,12,19,4,6,23,4 с  $a$  е означена модата, с  $b$  - медианата и с  $c$  - средната стойност. Кое от твърденията е вярно?

- А)  $a < b < c$                       Б)  $b < a < c$                       В)  $a < c < b$                       Г)  $b < c < a$

13. Страните  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  на  $\triangle ABC$  са равни съответно на 4 cm, 3 cm и 2 cm. Ако  $M$  е точка от страната  $BC$  и е на равни разстояния от  $AB$  и  $AC$ , то отсечката  $CM$  е равна на:

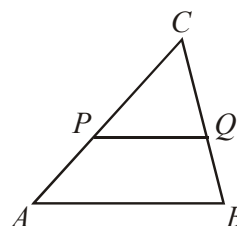
- А) 0,5 cm                      Б) 1 cm                      В) 1,5 cm                      Г) 2 cm



14. На чертежа  $AP : PC = 2 : 3$  и  $CQ : CB = 3 : 5$

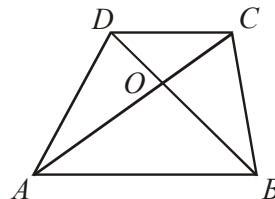
Вярно е, че:

- А)  $S_{PQC} : S_{ABC} = 3 : 5$                       Б)  $S_{PQC} : S_{ABQP} = 3 : 5$   
 В)  $S_{PQC} : S_{ABQP} = 9 : 16$                       Г)  $PQ$  и  $AB$  не са успоредни



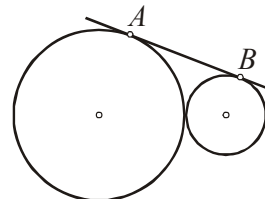
15. В трапеца  $ABCD$  основите са  $AB=18\text{ cm}$ ,  $CD=12\text{ cm}$  и точка  $O$  е пресечната точка на диагоналите. Ако  $CO=9\text{ cm}$ , то дължината на  $AC$  е:

- А)  $13,5\text{ cm}$
- Б)  $11\text{ cm}$
- В)  $12\text{ cm}$
- Г)  $22,5\text{ cm}$



16. Две окръжности с радиуси съответно  $6\text{ cm}$  и  $24\text{ cm}$  се допират външно, както е показано на чертежа. Дължината на общата им външна допирателна  $AB$  е:

- А)  $24\text{ cm}$
- Б)  $2\sqrt{153}\text{ cm}$
- В)  $36\text{ cm}$
- Г)  $6\sqrt{102}\text{ cm}$



17. За  $\triangle ABC$  са дадени дължините на страните  $AC=4\text{ cm}$ ,  $BC=5\text{ cm}$  и  $\angle BAC=120^\circ$ . Дължината на страната  $AB$  е:

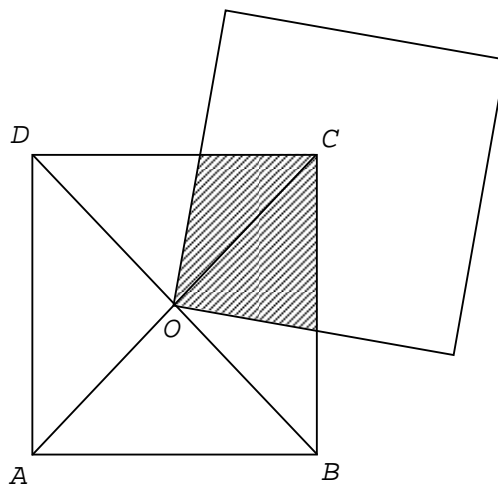
- А)  $3\text{ cm}$
- Б)  $(\sqrt{13}+2)\text{ cm}$
- В)  $(\sqrt{13}-2)\text{ cm}$
- Г)  $\sqrt{21}\text{ cm}$

18. В триъгълника  $ABC$  е дадено, че  $AB=1\text{ cm}$ ,  $BC=\sqrt{3}\text{ cm}$  и  $\angle ACB=30^\circ$ . Със сигурност мярката на  $\angle BAC$  е:

- А)  $60^\circ$
- Б)  $60^\circ$  или  $120^\circ$
- В)  $120^\circ$
- Г) невъзможно да се определи

19. Центърът  $O$  на единия от два еднакви квадрата със страна  $a$  съвпада с върха на другия квадрат. Лицето на незащрихованата част от квадрата  $ABCD$  е:

- А)  $\frac{4}{5}a^2$
- Б)  $\frac{3}{4}a^2$
- В)  $\frac{2}{3}a^2$
- Г) невъзможно да се определи



20. Даден е трапец  $ABCD$  с основи  $AB=8\text{ cm}$ ,  $CD=4,5\text{ cm}$ , диагонал  $AC=6\text{ cm}$  и бедро  $AD=3\text{ cm}$ . Периметърът на трапеца е:

- А)  $19,5\text{ cm}$
- Б)  $20\text{ cm}$
- В)  $20,5\text{ cm}$
- Г)  $41\text{ cm}$

Отговорите на задачите от 21. до 25. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Намерете най-голямото цяло число, което е решение на неравенството

$$\log_{\frac{1}{3}} x + 5 \log_{\frac{1}{3}} x > 6 \log_{\frac{1}{3}} 5.$$

22. Намерете стойностите на  $x$ , за които числата  $1, x^2, 6 - x^2$ , взети в този ред, образуват геометрична прогресия.

23. Ако  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  и  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ , намерете стойността на израза  $\frac{3 + \operatorname{tg} \alpha}{3 - 2 \operatorname{tg} \alpha}$ .

24. В равнобедрен правоъгълен триъгълник с катет  $6 \text{ cm}$  е вписан правоъгълник, така че върховете му лежат на страните на триъгълника. Ако правоъгълникът има общ ъгъл с триъгълника, намерете периметъра на правоъгълника.

25. На книжната борса предлагат два вида сборници по математика от различни автори – седем са за зрелостен изпит и три са за кандидат-студентски изпит. По колко различни начина Борис може да подбере по два сборника от всеки вид?

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Решете уравнението  $(5x - 4)(2x - 1) + 2 = 3\sqrt{10x^2 - 13x + 4}$

27. За томбола с награди в един клас се продават 20 билета, от които 3 печелят. Ученик си купил 5 билета. Каква е вероятността да печелят точно два от закупените билети?

28. В остроъгълен  $\triangle ABC$  с лице  $54 \text{ cm}^2$  отсечките  $AP$  ( $P \in BC$ ) и  $CQ$  ( $Q \in AB$ ) са височини. Лицето на  $\triangle BPQ$  е  $6 \text{ cm}^2$  и  $PQ = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ . Намерете радиуса на описаната около  $\triangle ABC$  окръжност.

## ФОРМУЛИ

### Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{Формули на Виет} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

### Квадратна функция

Графиката на  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  е парабола с връх точката  $(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a})$

### Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a; \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{k}}}; \quad \text{при } a > 0, n \geq 2, k \geq 2 \text{ и } n, m, k \in \mathbb{N}$$

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad \log_a a^x = x \quad a^{\log_a b} = b; \quad \text{при } b > 0, a > 0, a \neq 1$$

### Комбинаторика

Брой на пермутациите на  $n$  елемента:  $P_n = 1.2.3 \dots (n-1)n = n!$

Брой на вариациите на  $n$  елемента  $k$ -ти клас:  $V_n^k = n.(n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на  $n$  елемента  $k$ -ти клас:  $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n.(n-1) \dots (n-k+1)}{1.2.3 \dots (k-1)k}$

Вероятност  $P(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

### Прогресии

Аритметична прогресия:  $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Геометрична прогресия:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

Формула за сложна лихва:  $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

### Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник:  $c^2 = a^2 + b^2$      $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$      $a^2 = a_1c$      $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$      $r = \frac{a+b-c}{2}$      $\sin \alpha = \frac{a}{c}$      $\cos \alpha = \frac{b}{c}$      $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$      $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$      $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$      $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

Формула за медиана:  $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$      $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$

$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

Формула за ъглополовяща:  $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$      $l_c^2 = ab - nm$

### Формули за лице

Триъгълник:  $S = \frac{1}{2}ch_c$      $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$      $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$      $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник:  $S = ah_a$      $S = ab \sin \alpha$

Четириъгълник:  $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник:  $S = pr$

### Тригонометрични функции

| $\alpha^0$                   | $0^0$ | $30^0$               | $45^0$               | $60^0$               | $90^0$          |
|------------------------------|-------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\alpha$ rad                 | 0     | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin \alpha$                | 0     | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos \alpha$                | 1     | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\operatorname{tg} \alpha$   | 0     | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | –               |
| $\operatorname{cotg} \alpha$ | –     | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               |

|      | $-\alpha$                     | $90^\circ - \alpha$          | $90^\circ + \alpha$           | $180^\circ - \alpha$          |
|------|-------------------------------|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| sin  | $-\sin \alpha$                | $\cos \alpha$                | $\cos \alpha$                 | $\sin \alpha$                 |
| cos  | $\cos \alpha$                 | $\sin \alpha$                | $-\sin \alpha$                | $-\cos \alpha$                |
| tg   | $-\operatorname{tg} \alpha$   | $\operatorname{cotg} \alpha$ | $-\operatorname{cotg} \alpha$ | $-\operatorname{tg} \alpha$   |
| cotg | $-\operatorname{cotg} \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$   | $-\operatorname{tg} \alpha$   | $-\operatorname{cotg} \alpha$ |

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$