

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО
МАТЕМАТИКА

2 септември 2009 г. – Вариант 1

УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,

Тестът съдържа **28 задачи** по математика от два вида:

- 20 задачи със структуриран отговор с четири възможни отговора, от които само един е верен;
- 8 задачи със свободен отговор.

Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително) в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте със син/черен цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. Отбелязвайте верния отговор със знака **X** в кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

А В В Г

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и отбележете буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

А А В Г

За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е отбелязана със знака X.

Отговорите на задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.) запишете в предоставения свитък за свободните отговори, като за задачи от 26. до 28. вкл. запишете пълните решения с необходимите обосновки.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

Отговорите на задачите от 1. до 20. вкл. отбелязвайте в листа за отговори!

1. Кое от посочените числа е най-малко?

А) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ Б) $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ В) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$ Г) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

2. Стойността на израза $\sqrt{17^2 - 8^2} - \sqrt{(-2)^6} - \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2$ е:

А) 25 Б) 21 В) 9 Г) 5

3. Ако $x \neq y$ и $y \neq 0$, то изразът $\frac{x}{y^2 - xy} + \frac{1}{x - y}$ е еквивалентен на:

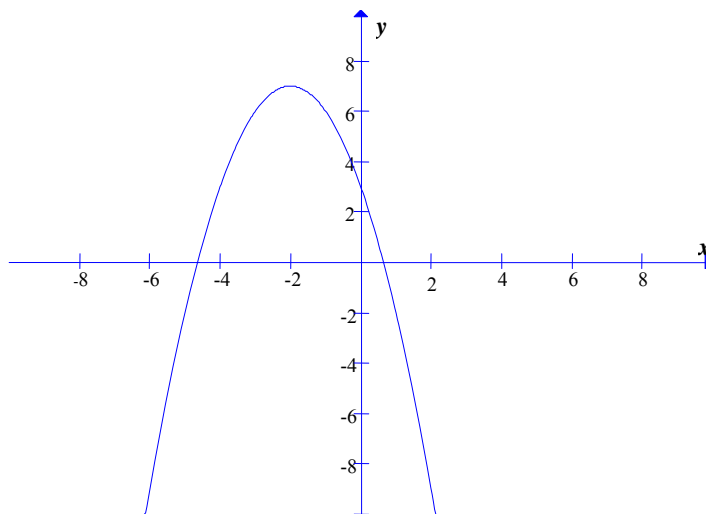
А) $\frac{x+y}{y(x-y)}$ Б) $\frac{x+1}{y(x-y)}$ В) $-\frac{1}{y}$ Г) $\frac{1}{y}$

4. Кое от уравненията има корени с различни знаци и положителният корен има по-голяма абсолютна стойност от отрицателния?

А) $x^2 + 7x + 5 = 0$ Б) $-x^2 + 2x + 3 = 0$ В) $x^2 + 2x - 3 = 0$ Г) $-2x^2 + 4x - 3 = 0$

5. Графиката на коя от посочените функции е показана на чертежа?

А) $y = -x^2 - 4x + 3$
Б) $y = -x^2 - 4x - 3$
В) $y = -x^2 + 4x + 3$
Г) $y = x^2 + 4x - 3$



6. Допустимите стойности на израза

$\frac{\sqrt[6]{-x^4 y^5}}{\sqrt[4]{x^3 y}}$ са:

А) $x \leq 0, y \leq 0$ Б) $x < 0, y < 0$ В) $x \leq 0, y \geq 0$ Г) $x > 0, y > 0$

7. Стойността на израза $6^{1+\log_6 20}$ е:

А) 6 Б) 20 В) 120 Г) 26

8. Решенията на неравенството $2x^2 - 3x + 1 > 0$ са:

- А) $x \in (-\infty; 0,5) \cup (1; +\infty)$ Б) $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$
 В) $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ Г) $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

9. За функциите $f(x) = x^4 - 1$ и $g(x) = \cos^3 x + 1$ е вярно:

- А) $f(x)$ е четна, а $g(x)$ - нечетна Б) $f(x)$ и $g(x)$ са нито четни, нито нечетни
 В) $f(x)$ и $g(x)$ са нечетни Г) $f(x)$ и $g(x)$ са четни

10. Стойността на израза $\cos 58^\circ \cos 28^\circ + \cos 32^\circ \cos 62^\circ$ е:

- А) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Б) 1 В) $\frac{1}{2}$ Г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. За аритметична прогресия a_1, a_2, \dots, a_9 е известно, че $a_5 = 4$. Сумата S_9 на първите 9 члена на прогресията е равна на:

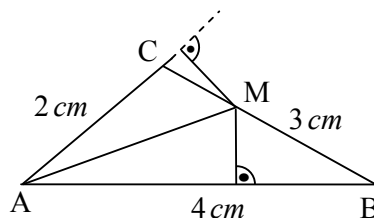
- А) 72 Б) 36 В) 18 Г) 9

12. За статистическия ред 3, 1, 12, 19, 4, 6, 23, 4 с a е означена модата, с b - медианата и с c - средната стойност. Кое от твърденията е вярно?

- А) $a < b < c$ Б) $b < a < c$ В) $a < c < b$ Г) $b < c < a$

13. Страните AB , BC и AC на $\triangle ABC$ са равни съответно на 4 cm, 3 cm и 2 cm. Ако M е точка от страната BC и е на равни разстояния от AB и AC , то отсечката CM е равна на:

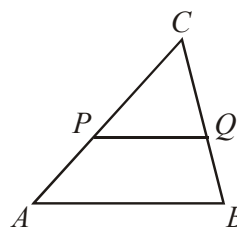
- А) 0,5 cm Б) 1 cm В) 1,5 cm Г) 2 cm



14. На чертежа $AP : PC = 2 : 3$ и $CQ : CB = 3 : 5$

Вярно е, че:

- А) $S_{PQC} : S_{ABC} = 3 : 5$ Б) $S_{PQC} : S_{ABQP} = 3 : 5$
 В) $S_{PQC} : S_{ABQP} = 9 : 16$ Г) PQ и AB не са успоредни



Отговорите на задачите от 21. до 25. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Намерете най-голямото цяло число, което е решение на неравенството $\log_{\frac{1}{3}} x + 5 \log_{\frac{1}{3}} x > 6 \log_{\frac{1}{3}} 5$.

22. Намерете стойностите на x , за които числата $1, x^2, 6 - x^2$, взети в този ред, образуват геометрична прогресия.

23. Ако $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, намерете стойността на израза $\frac{3 + \operatorname{tg} \alpha}{3 - 2 \operatorname{tg} \alpha}$.

24. В равнобедрен правоъгълен триъгълник с катет 6 cm е вписан правоъгълник, така че върховете му лежат на страните на триъгълника. Ако правоъгълникът има общ ъгъл с триъгълника, намерете периметъра на правоъгълника.

25. На книжната борса предлагат два вида сборници по математика от различни автори – седем са за зрелостен изпит и три са за кандидат-студентски изпит. По колко различни начина Борис може да подбере по два сборника от всеки вид?

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Решете уравнението $(5x - 4)(2x - 1) + 2 = 3\sqrt{10x^2 - 13x + 4}$

27. За томбола с награди в един клас се продават 20 билета, от които 3 печелят. Ученик си купил 5 билета. Каква е вероятността да печелят точно два от закупените билети?

28. В остроъгълен $\triangle ABC$ с лице 54 cm^2 отсечките AP ($P \in BC$) и CQ ($Q \in AB$) са височини. Лицето на $\triangle BPQ$ е 6 cm^2 и $PQ = 6\sqrt{2} \text{ cm}$. Намерете радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{Формули на Виет} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е парабола с връх точката $(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a})$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a; \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}; \quad \text{при } a > 0, n \geq 2, k \geq 2 \text{ и } n, m, k \in \mathbb{N}$$

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad \log_a a^x = x \quad a^{\log_a b} = b; \quad \text{при } b > 0, a > 0, a \neq 1$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = 1.2.3 \dots (n-1)n = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n.(n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n.(n-1) \dots (n-k+1)}{1.2.3 \dots (k-1)k}$

Вероятност $P(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

Формула за сложна лихва: $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

Формула за медиана: $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$

$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - nm$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin \alpha$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$