

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО  
МАТЕМАТИКА

1 септември 2009 г. – Вариант 2

*УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,*

Тестът съдържа **28 задачи** по математика от два вида:

- 20 задачи със структуриран отговор с четири възможни отговора, от които само един е верен;
- 8 задачи със свободен отговор.

**Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително)** в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте със син/черен цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. Отбелязвайте верния отговор със знака **X** в кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

(A)    ~~(B)~~    (C)    (D)

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и отбележете буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

(A)    ●    ~~(B)~~    (D)

**За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е отбелязана със знака X.**

Отговорите на задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.) запишете в предоставения свитък за свободните отговори, като за задачи от 26. до 28. вкл. запишете пълните решения с необходимите обосновки.

***ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!***

Отговорите на задачите от 1. до 20. вкл. отбелязвайте в листа за отговори!

1. Дадени са числата  $M = 3\frac{1}{3}\%$  от 20 и  $N = 0,667$ . Вярно е, че:

- А)  $M > N$       Б)  $M < N$       В)  $M = N$       Г)  $M$  и  $N$  не могат да се сравнят

2. Сумата  $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$  е равна на:

- А)  $4-2\sqrt{3}$       Б)  $-4$       В)  $0$       Г)  $4+2\sqrt{3}$

3. Изразът  $\frac{2-x}{x+3} : \frac{x^2-4}{2x}$  е дефиниран при:

- А)  $x \neq 0$       Б)  $x \neq 0, x \neq -3$       В)  $x \neq 0, x \neq 2, x \neq -2$       Г)  $x \neq 0, x \neq -3, x \neq \pm 2$

4. Ако  $x_1$  и  $x_2$  са корените на уравнението  $x^2 + 10x + 20 = 0$ , то стойността на израза  $\frac{x_1x_2^2 + x_1^2x_2}{30 + x_1 + x_2}$  е:

- А)  $-10$       Б)  $\frac{1}{4}$       В)  $\frac{1}{2}$       Г)  $5$

5. Броят на пресечните точки на графиките на функциите  $f(x) = x^2 - 5x + 3$  и  $g(x) = 1 + x^2$  са:

- А)  $0$       Б)  $1$       В)  $2$       Г)  $3$

6. Корените на уравнението  $(x-3) \cdot \sqrt{x-5} = 0$  са числата:

- А)  $3$       Б)  $3$  и  $5$       В)  $5$       Г)  $5$  и  $9$

7. Стойността на израза  $\log_3 9 - \lg \frac{1}{100} - 2^{2009} \cdot \log_5 1$  е равна на:

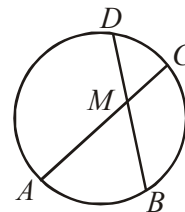
- А)  $0$       Б)  $1$       В)  $4$       Г)  $5$

8. Решенията на неравенството  $\frac{3-x}{x-1} \leq 0$  са:

- А)  $x \in [1; 3]$       Б)  $x \in (-\infty; 1) \cup [3; +\infty)$   
В)  $x \in (1; 3]$       Г)  $x \in (-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$



15. На чертежа хордите  $AC$  и  $BD$  се пресичат в точка  $M$ . Ако  $BM = 12$  cm,  $DM = 9$  cm и  $AM : AC = 4 : 7$ , то НЕ е вярно, че:



A)  $AB \parallel CD$

Б)  $S_{AMB} : S_{DMC} = 2 : \sqrt{3}$

В)  $S_{AMD} : S_{DMC} = 4 : 3$

Г)  $DC : AB = 3 : 4$

16. Вписаната в правоъгълен триъгълник окръжност се допира до хипотенузата  $AB$  в точка  $M$ . Отсечката  $AM$  е 4, а хипотенузата е 10. Лицето на триъгълника е:

A) 12

Б) 24

В) 40

Г) 48

17. Ако  $BC$  е най-голямата страна в разностранния  $\triangle ABC$ , а  $d$  е диаметърът на описаната около триъгълника окръжност и  $BC : d = 1 : \sqrt{2}$ , то мярката на  $\angle BAC$  е:

A)  $45^\circ$

Б)  $135^\circ$

В)  $120^\circ$

Г)  $60^\circ$

18. В остроъгълния  $\triangle ABC$  страната  $BC = 7$  cm и  $AB = 5$  cm. Ако  $R$  е радиусът на описаната около триъгълника окръжност и  $BC : R = \sqrt{3}$ , то дължината на страната  $AC$  е равна на:

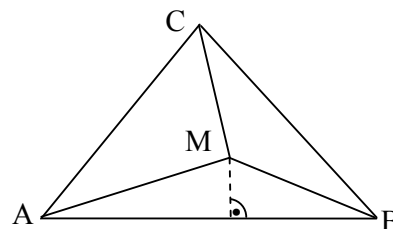
A) 6 cm

Б)  $\sqrt{39}$  cm

В) 8 cm

Г)  $\sqrt{109}$  cm

19.  $\triangle ABC$  е равностранен със страна  $AB = 4\sqrt{3}$  cm. Точка  $M$  е вътрешна за триъгълника и е такава, че лицата на триъгълниците  $ABM$ ,  $BCM$  и  $ACM$  се отнасят съответно както 1:2:3. Разстоянието от  $M$  до  $AB$  е равно на:



A) 1 cm

Б) 2 cm

В) 3 cm

Г) 6 cm

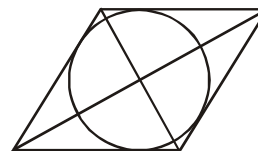
20. Ако страната на ромб е 12 cm и един от ъглите му е  $60^\circ$ , то радиусът на вписаната в ромба окръжност е равен на:

A) 3 cm

Б)  $3\sqrt{3}$  cm

В) 6 cm

Г)  $6\sqrt{3}$  cm



Отговорите на задачите от 21. до 25. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Запишете най-малкото цяло число  $x$ , за което е изпълнено неравенството

$$2.\left(\frac{2}{3}\right)^x + 5.\left(\frac{2}{3}\right)^x < 7$$

22. Ако се съберат първият и пети член на аритметична прогресия се получава 18, а ако от седмия се извади сборът на втория и трети член на тази прогресия се получава 1. Намерете сбора на първите 10 члена на прогресията.

23. Намерете стойността на израза  $\operatorname{tg}75^\circ + \frac{1}{\operatorname{tg}75^\circ}$ .

24. Основата на равнобедрен триъгълник е 30 cm, а центърът на вписаната в триъгълника окръжност дели височината към основата в отношение 5:13, считано от основата. Да се намери лицето на триъгълника в квадратни сантиметри.

25. Нека  $k$  е случайно избрано число измежду 5 цели числа. Намерете вероятността числото  $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$  да е ирационално число.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Решете уравнението  $\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} + 1 = 6\sqrt{\frac{x-3}{x+3}}$ .

27. Дадени са пет отсечки с дължини 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm и 6 cm. Каква е вероятността три случайно избрани от тях да могат да образуват триъгълник?

28. В триъгълника  $ABC$   $BC = 6$  cm,  $AC = 8$  cm. Ъглополовящата през върха  $C$  пресича описаната около триъгълника окръжност в точка  $L$ . Да се намери страната  $AB$  в сантиметри, ако  $CL = AC$ .

## ФОРМУЛИ

### Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\text{Формули на Виет} \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

### Квадратна функция

Графиката на  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$  е парабола с връх точката  $(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a})$

### Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a; \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{k}}}; \quad \text{при } a > 0, n \geq 2, k \geq 2 \text{ и } n, m, k \in \mathbb{N}$$

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad \log_a a^x = x \quad a^{\log_a b} = b; \quad \text{при } b > 0, a > 0, a \neq 1$$

### Комбинаторика

Брой на пермутациите на  $n$  елемента:  $P_n = 1.2.3 \dots (n-1)n = n!$

Брой на вариациите на  $n$  елемента  $k$ -ти клас:  $V_n^k = n.(n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на  $n$  елемента  $k$ -ти клас:  $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n.(n-1) \dots (n-k+1)}{1.2.3 \dots (k-1)k}$

Вероятност  $P(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

### Прогресии

Аритметична прогресия:  $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Геометрична прогресия:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

Формула за сложна лихва:  $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

### Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник:  $c^2 = a^2 + b^2$      $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$      $a^2 = a_1c$      $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$      $r = \frac{a+b-c}{2}$      $\sin \alpha = \frac{a}{c}$      $\cos \alpha = \frac{b}{c}$      $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$      $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$      $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$      $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

Формула за медиана:  $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$      $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$

$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

Формула за ъглополовяща:  $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$      $l_c^2 = ab - nm$

### Формули за лице

Триъгълник:  $S = \frac{1}{2}ch_c$      $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$      $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$      $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник:  $S = ah_a$      $S = ab \sin \alpha$

Четириъгълник:  $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник:  $S = pr$

### Тригонометрични функции

$\alpha^0$	$0^0$	$30^0$	$45^0$	$60^0$	$90^0$
$\alpha$ rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$