

Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

9. клас



РЕГАЛИЯ 6

Използвани означения:



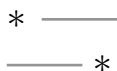
обърнете внимание



исторически бележки



алгоритъм при решаване на някои задачи



незадължителен текст с повишена трудност

© Иван Тонов, Ирина Шаркова, Мария Христова,
Донка Капралова, Веселин Златилов, автори, 2018 г.

© Красимира Коцева, графичен дизайн, 2018 г.

© Николай Цачев, корица, 2018 г.

© „Регалия 6“ издателство, 2018 г.

ISBN 978-954-745-288-6

СЪДЪРЖАНИЕ

Тема. Начален преговор

Начален преговор. Алгебра.....	7
Начален преговор. Геометрия.....	9

Тема 1. Класическа вероятност

1. Комбинаторика. Преговор.....	15
2. Класическа вероятност.....	21
3. Класическа вероятност. Упражнение.....	27
4. Вероятност на сума на несъвместими събития.....	29
5. Вероятност на противоположно събитие, на обединение и сечение на събития.....	33
6. Вероятност на сума на съвместими събития.....	38
Задачи към тема 1.....	42
Контролен тест.....	46

Тема 2. Функции

7. Функция. Дефиниционно множество.....	47
8. Начини на задаване на функция.....	51
9. Графика на функцията $y = ax$. Свойства.....	55
10. Графика на линейната функция $y = ax + b$	59
11. Свойства на линейната функция.....	64
12. Квадратна функция. Графика на функцията $y = ax^2$	67
13. Графика на квадратната функция $y = ax^2 + bx + c$. Растене и намаляване на квадратна функция, най-малка и най-голяма стойност на квадратна функция.....	72
14. Графика на квадратната функция $y = ax^2 + bx + c$. Упражнение.....	76
15. Графично представяне на решенията на уравнение.....	80
Задачи към тема 2.....	83
Контролен тест.....	86

Тема 3. Системи линейни уравнения с две неизвестни

16. Линейни уравнения с две неизвестни.....	87
17. Взаимно разположение на графики на линейни функции.....	89
18. Системи линейни уравнения с две неизвестни. Графично представяне на решенията на системи линейни уравнения с две неизвестни.....	92
19. Решаване на системи линейни уравнения с две неизвестни чрез заместване и чрез събиране.....	95

20. Решаване на системи линейни уравнения с две неизвестни. Упражнение	98
21. Решаване на системи линейни уравнения. Упражнение	101
22. Изследване броя на решенията на система линейни уравнения	104
23. Приложения на системи линейни уравнения	106
24. Моделиране със системи линейни уравнения.....	108
Задачи към тема 3	111
Контролен тест	112

Тема 4. Системи уравнения от втора степен с две неизвестни

25. Системи уравнения от втора степен с две неизвестни	114
26. Решаване на системи уравнения от втора степен с две неизвестни, на които едното уравнение е от първа степен.....	117
27. Системи уравнения от втора степен с две неизвестни, на които едното уравнение е от първа степен. Упражнение	119
28. Системи уравнения с две неизвестни, на които двете уравнения са от втора степен	120
29. Системи уравнения с две неизвестни, на които двете уравнения са от втора степен. Упражнение 1	123
30. Системи уравнения с две неизвестни, на които двете уравнения са от втора степен. Упражнение 2	125
31. Моделиране със системи уравнения от втора степен с две неизвестни	127
Задачи към тема 4	129
Контролен тест	131

Тема 5. Подобни триъгълници

32. Пропорционални отсечки	132
33. Теорема на Талес. Обратна теорема на Талес.....	136
34. Теорема на Талес. Упражнение	142
35. Свойство на ъглополовящите в триъгълник	145
36. Свойство на ъглополовящите. Упражнение	149
37. Подобни триъгълници. Първи признак за подобност на триъгълници	153
38. Първи признак за подобност на триъгълници. Упражнение	157
39. Втори и трети признак за подобност на триъгълници	161
40. Признаци за подобност на триъгълници. Упражнение	164
41. Свойства на подобните триъгълници	167

42. Подобни триъгълници и окръжност. Упражнение	171
43. Подобни триъгълници – приложение. Теорема на Менелай и Чева*	174
44. Отношение на лицата на подобните триъгълници	179
45. Отношение на лицата на подобните триъгълници. Упражнение	182
Задачи към тема 5	184
Контролен тест	185

Тема 6. Рационални неравенства

46. Обединение и сечение на числови интервали	188
47. Линейни неравенства с едно неизвестно. Преговор	190
48. Системи линейни неравенства с едно неизвестно	193
49. Системи линейни неравенства с едно неизвестно. Упражнение	196
50. Неравенства от вида $ ax + b < c$ и $ ax + b > c$	198
51. Модулни неравенства. Упражнение	200
52. Неравенства от вида $(ax + b)(cx + d) > 0$ и $(ax + b)(cx + d) < 0$	202
53. Квадратни неравенства. Метод на интервалите	205
54. Квадратни неравенства	208
55. Квадратни неравенства. Упражнение	210
56. Приложение на метода на интервалите при решаване на неравенства от по-висока степен	213
57. Дробни неравенства	216
58. Моделиране с неравенства	219
Задачи към тема 6	221
Контролен тест 1	222
Контролен тест 2	223

Тема 7. Метрични зависимости между отсечки

59. Метрични зависимости между отсечки в правоъгълен триъгълник	225
60. Метрични зависимости в правоъгълен триъгълник. Упражнение	229
61. Теорема на Питагор	231
62. Теорема на Питагор. Упражнение	235
63. Намиране на дължини на отсечки в правоъгълна координатна система	238
64. Решаване на правоъгълен триъгълник	241
65. Правоъгълен триъгълник. Упражнение	244

66. Решаване на равнобедрен триъгълник	247
67. Равнобедрен триъгълник. Упражнение	249
68. Решаване на равнобедрен трапец	252
69. Намиране на елементи на правоъгълен трапец. Упражнение	255
70. Решаване на успоредник	258
71. Успоредник. Упражнение	260
72. Метрични зависимости между отсечки в окръжност	263
73. Метрични зависимости в окръжност. Упражнение	266
Задачи към тема 7	269
Контролен тест	271
Тема 8. Тригонометрични функции на остър ъгъл	
74. Тригонометрични функции на остър ъгъл	273
75. Стойности на тригонометрични функции на ъгли с мерки 30°, 45°, 60°	277
76. Основни зависимости между тригонометричните функции на един и същ ъгъл	279
77. Тригонометрични функции на остри ъгли, които се допълват до 90°	282
78. Намиране на основните елементи на правоъгълен триъгълник	284
79. Намиране елементи на равнобедрен триъгълник	287
80. Намиране елементи на равнобедрен и правоъгълен трапец	289
81. Приложение на тригонометрични функции на остър ъгъл	292
Задачи към тема 8	295
Контролен тест	296
Тема. Годишен преговор	
Годишен преговор. Алгебра	298
Годишен преговор. Геометрия	302
Отговори на задачите	305

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР. АЛГЕБРА

Квадратен корен

Числото \sqrt{a} съществува при $a \geq 0$ и за него е изпълнено $\sqrt{a} \geq 0$ и $(\sqrt{a})^2 = a$.

Свойства на квадратните корени:

- за всяко число a е вярно равенството $\sqrt{a^2} = |a|$;
- ако $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$;
- ако $a \geq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;
- ако $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $a \leq b$, то $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

За рационализиране на знаменателя на дроб се използват формулите:

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$ за всяко $a > 0$;
- $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$, за всяко $a > 0$, $b > 0$.

Квадратни уравнения

Уравнение от вида $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$, където x е неизвестно и a , b и c са реални числа, се нарича квадратно уравнение.

Корените на квадратното уравнение се намират по формулата

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ където } D = b^2 - 4ac:$$

- ако $D > 0$, уравнението има два различни корена;
- ако $D = 0$, уравнението има два равни корена (един двоен корен);
- ако $D < 0$, уравнението няма реални корени.

Ако коефициентът $b = 2k$, то корените на квадратното уравнение могат да се намерят и по формулата $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Числата x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, тогава и само тогава, когато $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ (формули на Виет).

Необходимо и достатъчно условие уравнението $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, да има:

- два положителни корена е $D \geq 0$, $x_1x_2 > 0$ и $x_1 + x_2 > 0$;
- два отрицателни корена е $D \geq 0$, $x_1x_2 > 0$ и $x_1 + x_2 < 0$;

- два корена с различни знаци е $x_1 x_2 < 0$.
- Ако квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$:
- има корени x_1 и x_2 , то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;
- няма реални корени, то $ax^2 + bx + c$ е неразложим.

Рационални изрази

Рационален израз, който съдържа променлива в знаменател се нарича дробен израз.

Допустимите стойности на дробен рационален израз са всички числа, за които знаменателят е различен от нула.

Частното на два цели рационални изрази се нарича рационална дроб.

Ако $\frac{A}{B}$ е рационална дроб и C е израз, различен от 0, то $\frac{A}{B} = \frac{A.C}{B.C}$ (основно свойство на рационалната дроб).

Ако A, B, C и D са рационални изрази, то в сила са правилата за действия с рационални дроби:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}, B \neq 0; \quad \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A.C}{B.D}, B \neq 0, D \neq 0;$$

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A.D}{B.C}, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0; \quad \left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}, B \neq 0, n \in \mathbf{N}.$$

Уравнение, което съдържа неизвестното в знаменател, се нарича дробно уравнение.

Дефиниционната област на дробното уравнение е общата дефиниционна област на участващите в него изрази.

Дробно уравнение решаваме, като го преобразуваме в цяло уравнение, на което намираме корените и проверяваме дали те са от дефиниционната област на даденото уравнение.

Задачи

1. Да се опрости изразът:

а) $\sqrt{5\frac{1}{16}} + \sqrt{54} - \sqrt{600}$; б) $\frac{3\sqrt{15} - \sqrt{135}}{\sqrt{3}}$; в) $(\sqrt{4 + \sqrt{3}} + \sqrt{4 - \sqrt{3}})^2$.

2. Да се рационализира знаменателят на дробта:

а) $\frac{7}{\sqrt{21}}$; б) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{7} - 2}$; г) $\frac{11}{3\sqrt{5} + 1}$; д) $\frac{67}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$.

3. Да се докаже равенството:

а) $\sqrt{4, 11 - \sqrt{0, 0121}} = 2$; б) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$;
 в) $(4\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 5\sqrt{6} - 11$; г*) $\frac{20}{\sqrt{34 - 6\sqrt{21}}} + \frac{20}{3\sqrt{3} + \sqrt{7}} = 6\sqrt{3}$.

4. Да се реши уравнението:

- а) $2x^2 - 9x - 5 = 0$; б) $4x^2 - 8x + 3 = 0$;
в) $2x^2 + x + 5 = 0$; г) $14x - 49x^2 - 1 = 0$;
д) $|3x^2 - x - 1| = 3$; е) $(x + 1)^3 + (x + 2)^3 = 2x(1 - x)^2$.

5. Да се реши чрез полагане уравнението:

- а) $x^4 - x^2 - 12 = 0$; б) $(x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) = 15$; в) $4x^2 + |x| = 5$.

6. Да се съкрати дробта:

- а) $\frac{x^2 - 8x - 9}{x^2 + 9x + 8}$; б) $\frac{x^2 + 6x - 91}{49 - x^2}$; в) $\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4 - 12x^2 + 27}$.

7. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2 + 5x - 4 = 0$, да се пресметне:

- а) $3x_1 + 3x_2 - x_1x_2$; б) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$; в) $x_1^2 + x_2^2$; г) $\frac{x_2}{1 + \frac{x_2}{x_1}}$.

8. Да се определи колко положителни и колко отрицателни корена има уравнението:

- а) $x^2 - 6x - 4 = 0$; б) $2x^2 + 5x + 1 = 0$; в) $4x^2 - 15x + 1 = 0$.

9. Да се определи множеството от допустимите стойности на израза:

- а) $\left(\frac{1}{2x-2} + \frac{3x}{x^2-1}\right) : (x+2)$; б) $\frac{x-3}{x+2} : \frac{x^2-9}{3x}$; в) $\frac{3}{2x^2-3x} : \frac{x^2+1}{3x^2+5x+2}$.

10. Да се извършат действията:

- а) $\frac{1}{x+1} - \frac{2x^2+2x+3}{x+2-x^2}$; б) $\frac{x+5}{y-3} : \frac{x^2+4x-5}{y^2-9}$.

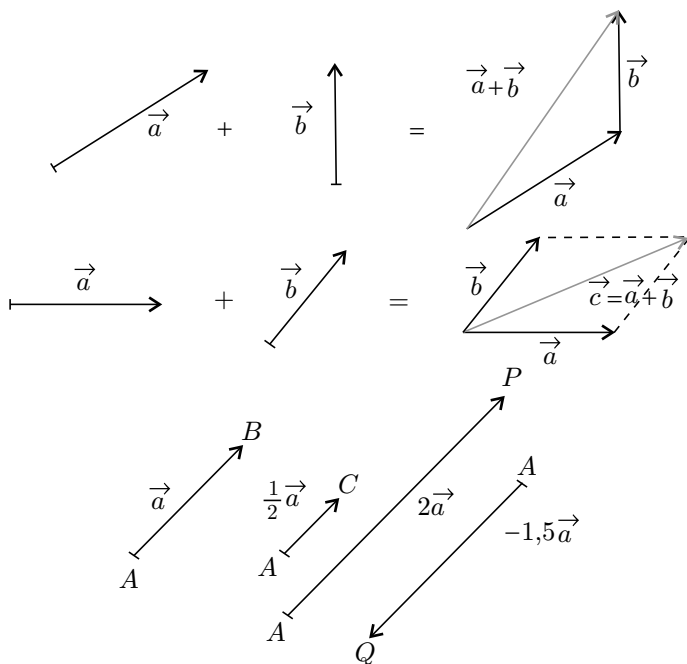
11. Да се реши дробното уравнение:

- а) $\frac{x^2}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2}$; б) $\frac{x+4}{x+2} - \frac{3}{x+4} = \frac{6}{x^2+6x+8}$;
в) $\left(\frac{x^2}{x-1} + 1\right)^2 - 9\left(\frac{x^2}{x-1} + 1\right) = 10$; г) $\frac{1}{x+2} - \frac{8}{x^3-4x} = \frac{x}{2x-x^2}$.

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР. ГЕОМЕТРИЯ

Насочени отсечки и вектори

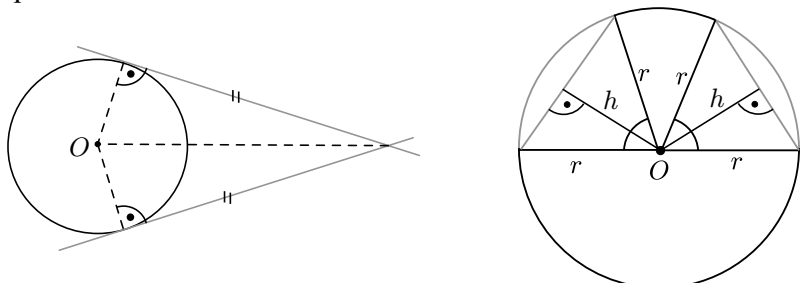
Насочените отсечки имат определени начало и край. Множество от равни помежду си насочени отсечки е вектор. Може да събираме и изваждаме векторите, а също и да ги умножаваме с числа. Свойствата на тези действия с векторите са подобни на свойствата на действията с числа.



Взаимни положения на прави, отсечки, ъгли и окръжности

Ако права и окръжност имат само една обща точка, правата е допирателна към окръжността в тази точка. Необходимо и достатъчно условие за това е правата да е перпендикулярна на радиуса на окръжността в допирната точка.

През външна за дадена окръжност точка съществуват две допирателни прави към окръжността. Допирателните отсечки от тази точка до окръжността са равни.

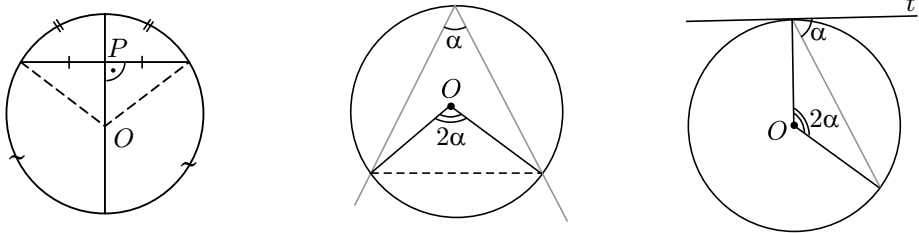


Две дъги от една окръжност са равни точно тогава, когато съответните им хорди са равни.

Две хорди в една окръжност са равни точно тогава, когато са на равни разстояния от центъра на окръжността.

Диаметърът на окръжност е перпендикулярен на хорда от същата окръжност, която не е диаметър, тогава и само тогава, когато той:

- разполовява хордата;
- разполовява дъгите, чиито краища са краищата на хордата.



Централният ъгъл е равен на съответната му дъга.

Вписаният и периферният ъгъл са равни на:

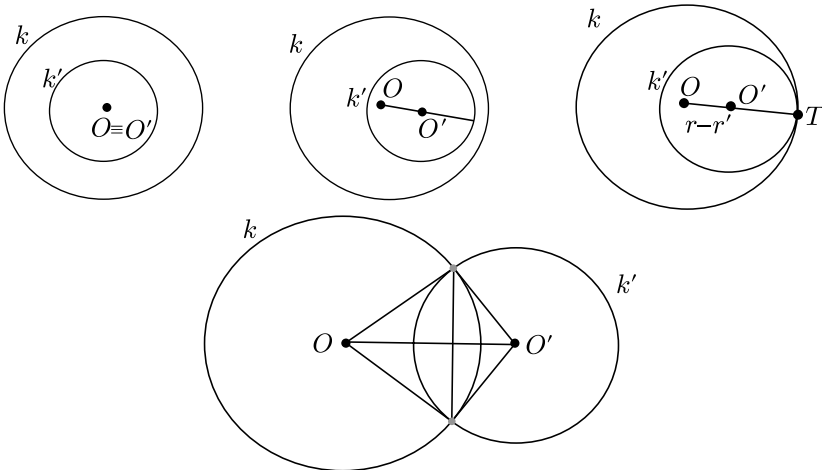
- половината от съответния им централен ъгъл;
- половината от мярката на съответната им дъга.

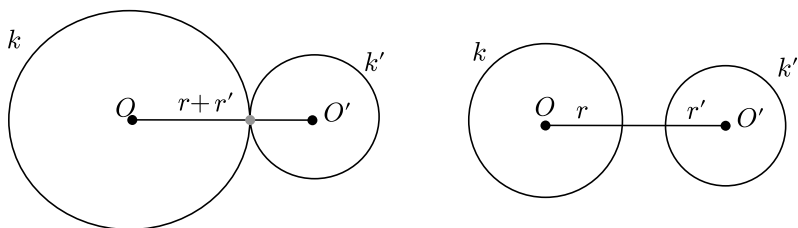
Ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжност, е равен на полусбора на градусните мерки на съответните му дъги.

Ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжност, а рамената му имат общи точки с окръжността, е равен на полуразликата на градусните мерки на съответните му дъги.

За окръжностите $k(O; r)$ и $k'(O'; r')$ с централа $OO' = d$ имаме:

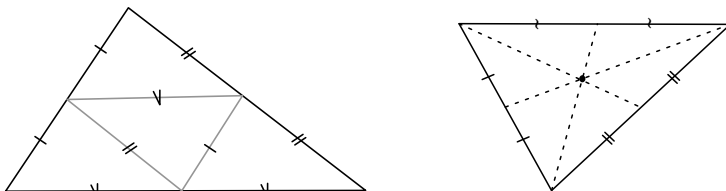
$d < r - r'$	k' е вътрешна за k
$d = r - r'$	k и k' са вътрешнодопирателни
$r - r' < d < r + r'$	k и k' се пресичат
$d = r + r'$	k и k' са външнодопирателни
$d > r + r'$	k и k' са външни една за друга





Триъгълник

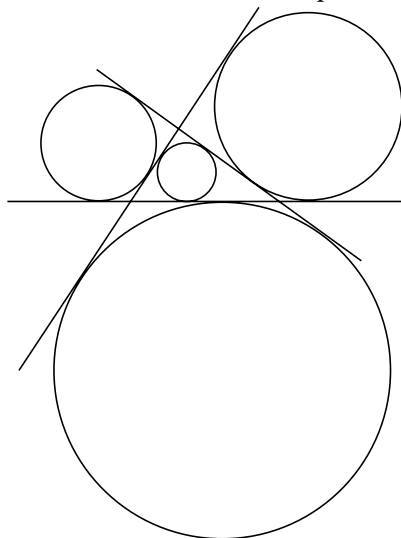
Всеки триъгълник има три средни отсечки. Всяка средна отсечка свързва средите на две от страните на триъгълника, успоредна е на третата му страна и е равна на половината от нея.



Трите медиани на всеки триъгълник се пресичат в медицентъра му, който ги дели в отношение $2 : 1$, считано от върха.

Около всеки триъгълник може да се опише единствена окръжност. Центърът ѝ е пресечната точка на симетралите на страните му.

Във всеки триъгълник има точно една вписана окръжност. Центърът ѝ е пресечната точка на трите ъглополовящи на триъгълника.



За всеки триъгълник съществуват точно три външновписани окръжности. Центърът на всяка от тях е пресечната точка на ъглополовящата на един вътрешен ъгъл на триъгълника и ъглополовящите на външните ъгли при другите два върха на триъгълника.

Правите, върху които лежат височините на триъгълник, се пресичат в ортоцентъра му.

Четириъгълник

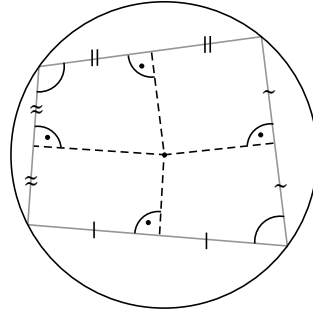
Средната отсечка на всеки трапец свързва средите на бедрата му, успоредна е на основите му и дължината ѝ е равна на полусбора им.

Трапецът е равнобедрен тогава и само тогава, когато:

- ъглите при всяка от основите му са равни;
- диагоналите му са равни;
- диагоналите му сключват равни ъгли с основите.

Четириъгълник е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато:

- сборът на коя да е негова двойка срещуположни ъгли е 180° ;
- симетралите на страните му се пресичат в една точка;
- някоя от страните му се вижда под един и същ ъгъл от два върха на четириъгълника, които лежат в една полуравнина относно тази страна.

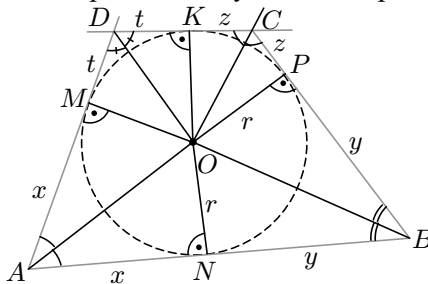


Успоредник е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато е правоъгълник.

Трапец е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато е равнобедрен.

Четириъгълник е описан около окръжност тогава и само тогава, когато:

- ъглополовящите на вътрешните му ъгли се пресичат в една точка;



- сборът на две негови срещуположни страни е равен на сбора на другите две страни.

Задачи

1. Дадено е, че в четириъгълника $ABCD$ средите на диагоналите AC и BD са съответно точките M и N . Докажете, че $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$.
2. В равнобедрения $\triangle ABC$ точката E е среда на основата AB , $M \in AC$ и $N \in BC$ така, че $EM \parallel BC$ и $EN \parallel AC$. Определете вида на четириъгълника $ENCM$ и намерете периметъра му, ако $AC = 8$ cm.
3. Дадено е, че правата AB се допира до окръжността $k(O, r = 6$ cm) в точка B , а $AB = 8$ cm. Намерете периметъра на $\triangle AOB$.
4. В окръжност $k(O)$ са дадени хордите AB и CD .
 - а) Намерете мярката на $\sphericalangle BDC$, ако $\sphericalangle ACD = 15^\circ$ и $AB \perp CD$.
 - б) Намерете мярката на $\sphericalangle AOD$, ако $\sphericalangle ACD = 95^\circ$.
 - в) Намерете мярката на $\sphericalangle ACD$, ако AB е диаметър и $\sphericalangle BCD = 20^\circ$.
5. Диагоналите на трапеца $ABCD$ са ъглополовящи на ъглите при голямата му основа AB . Докажете, че:
 - а) трапецът $ABCD$ е равнобедрен;
 - б) $\triangle ABO$, където $O = AC \cap BD$ е равнобедрен.
6. Страните на $\triangle ABC$ са съответно 5 cm, 6 cm и 7 cm. Намерете в какви отношения са разделени тези страни от допирните им точки с вписаната в триъгълника окръжност.
7. За мерките на ъглите на четириъгълника $ABCD$ е изпълнена пропорцията $\sphericalangle BSA : \sphericalangle DBC = \sphericalangle BDA : \sphericalangle DAC$. Докажете, че $ABCD$ е вписан в окръжност.