Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

9. клас

РЕГАЛИЯ 6

Използвани означения:

! обърнете внимание

исторически бележки

алгоритъм при решаване на някои задачи

* ——— незадължителен текст с повишена трудност ——— *

ISBN 978-954-745-288-6

СЪДЪРЖАНИЕ

ТЕМА

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР. АЛГЕБРА

Квадратен корен

Числото $\sqrt{a}$ съществува при $a \geqq 0$ и за него е изпълнено $\sqrt{a} \geqq 0$ и $(\sqrt{a})^2 = a$.

Свойства на квадратните корени:

- за всяко число a е вярно равенството $\sqrt{a^2} = |a|$;
- ако $a \geqq 0$ и $b \geqq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$;
- ако $a \geqq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;
- ако $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ и $a \leqq b$, то $\sqrt{a} \leqq \sqrt{b}$.

За рационализиране на знаменателя на дроб се използват формулите:

- $\sqrt{a}.\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$ за всяко $a > 0$;
- $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$, за всяко $a > 0$, $b > 0$.

Квадратни уравнения

Уравнение от вида $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$, където x е неизвестно и a, b и c са реални числа, се нарича квадратно уравнение.

Корените на квадратното уравнение се намират по формулата

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, където $D = b^2 - 4ac$:

- ако $D > 0$, уравнението има два различни корена;
- ако $D = 0$, уравнението има два равни корена (един двоен корен);
- ако $D < 0$, уравнението няма реални корени.

Ако коефициентът $b = 2k$, то корените на квадратното уравнение могат да се намерят и по формулата $x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

Числата x_1 и x_2 са корени на квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, тогава и само тогава, когато $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ и $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$ (формули на Виет).

Необходимо и достатъчно условие уравнението $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, да има:

- два положителни корена е $D \geqq 0$, $x_1 x_2 > 0$ и $x_1 + x_2 > 0$;
- два отрицателни корена е $D \geqq 0$, $x_1 x_2 > 0$ и $x_1 + x_2 < 0$;

• два корена с различни знаци е $x_1x_2 < 0$.

Ако квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$:

• има корени x_1 и x_2, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;

• няма реални корени, то $ax^2 + bx + c$ е неразложим.

Рационални изрази

Рационален израз, който съдържа променлива в знаменател се нарича дробен израз.

Допустимите стойности на дробен рационален израз са всички числа, за които знаменателят е различен от нула.

Частното на два цели рационални израза се нарича рационална дроб.

Ако $\dfrac{A}{B}$ е рационална дроб и C е израз, различен от 0, то $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A.C}{B.C}$ (основно свойство на рационалната дроб).

Ако A, B, C и D са рационални изрази, то в сила са правилата за действия с рационални дроби:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{B} = \frac{A \pm C}{B}, B \neq 0; \quad \frac{A}{B}.\frac{C}{D} = \frac{A.C}{B.D}, B \neq 0, D \neq 0;$$

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A.D}{B.C}, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0; \quad \left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}, B \neq 0, n \in \mathbf{N}.$$

Уравнение, което съдържа неизвестното в знаменател, се нарича дробно уравнение.

Дефиниционната област на дробното уравнение е общата дефиниционна област на участващите в него изрази.

Дробно уравнение решаваме, като го преобразуваме в цяло уравнение, на което намираме корените и проверяваме дали те са от дефиниционната област на даденото уравнение.

Задачи

1. Да се опрости изразът:

а) $\sqrt{5\frac{1}{16}} + \sqrt{54} - \sqrt{600}$; б) $\dfrac{3\sqrt{15} - \sqrt{135}}{\sqrt{3}}$; в) $(\sqrt{4 + \sqrt{3}} + \sqrt{4 - \sqrt{3}})^2$.

2. Да се рационализира знаменателят на дробта:

а) $\dfrac{7}{\sqrt{21}}$; б) $\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{7} - 2}$; г) $\dfrac{11}{3\sqrt{5} + 1}$; д) $\dfrac{67}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$.

3. Да се докаже равенството:

а) $\sqrt{4,11 - \sqrt{0,0121}} = 2$; б) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$;

в) $(4\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 5\sqrt{6} - 11$; г*) $\dfrac{20}{\sqrt{34 - 6\sqrt{21}}} + \dfrac{20}{3\sqrt{3} + \sqrt{7}} = 6\sqrt{3}$.

4. Да се реши уравнението:
а) $2x^2 - 9x - 5 = 0$;   б) $4x^2 - 8x + 3 = 0$;
в) $2x^2 + x + 5 = 0$;   г) $14x - 49x^2 - 1 = 0$;
д) $|3x^2 - x - 1| = 3$;   е) $(x+1)^3 + (x+2)^3 = 2x(1-x)^2$.

5. Да се реши чрез полагане уравнението:
а) $x^4 - x^2 - 12 = 0$;   б) $(x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) = 15$;   в) $4x^2 + |x| = 5$.

6. Да се съкрати дробта:
а) $\dfrac{x^2 - 8x - 9}{x^2 + 9x + 8}$;   б) $\dfrac{x^2 + 6x - 91}{49 - x^2}$;   в) $\dfrac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^4 - 12x^2 + 27}$.

7. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $2x^2 + 5x - 4 = 0$, да се пресметне:
а) $3x_1 + 3x_2 - x_1x_2$;   б) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$;   в) $x_1^2 + x_2^2$;   г) $\dfrac{x_2}{1 + \dfrac{x_2}{x_1}}$.

8. Да се определи колко положителни и колко отрицателни корена има уравнението:
а) $x^2 - 6x - 4 = 0$;   б) $2x^2 + 5x + 1 = 0$;   в) $4x^2 - 15x + 1 = 0$.

9. Да се определи множеството от допустимите стойности на израза:
а) $\left(\dfrac{1}{2x-2} + \dfrac{3x}{x^2-1}\right) : (x+2)$;   б) $\dfrac{x-3}{x+2} : \dfrac{x^2-9}{3x}$;   в) $\dfrac{3}{2x^2 - 3x} : \dfrac{x^2+1}{3x^2+5x+2}$.

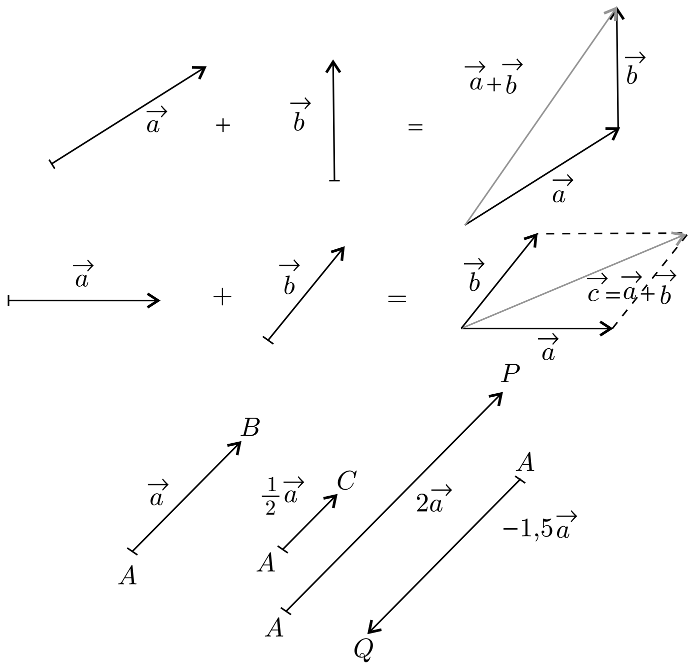
10. Да се извършат действията:
а) $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2x^2 + 2x + 3}{x + 2 - x^2}$;   б) $\dfrac{x+5}{y-3} : \dfrac{x^2 + 4x - 5}{y^2 - 9}$.

11. Да се реши дробното уравнение:
а) $\dfrac{x^2}{x^2-4} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{2}{x+2}$;   б) $\dfrac{x+4}{x+2} - \dfrac{3}{x+4} = \dfrac{6}{x^2+6x+8}$;
в) $\left(\dfrac{x^2}{x-1} + 1\right)^2 - 9\left(\dfrac{x^2}{x-1} + 1\right) = 10$;   г) $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{8}{x^3 - 4x} = \dfrac{x}{2x - x^2}$.

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР. ГЕОМЕТРИЯ

Насочени отсечки и вектори

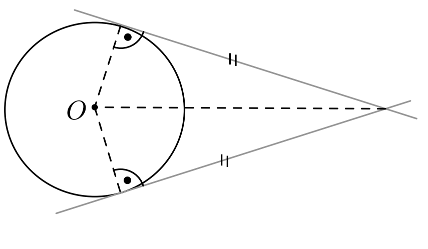
Насочените отсечки имат определени начало и край. Множество от равни помежду си насочени отсечки е вектор. Може да събираме и изваждаме векторите, а също и да ги умножаваме с числа. Свойствата на тези действия с векторите са подобни на свойствата на действията с числа.



Взаимни положения на прави, отсечки, ъгли и окръжности

Ако права и окръжност имат само една обща точка, правата е допирателна към окръжността в тази точка. Необходимо и достатъчно условие за това е правата да е перпендикулярна на радиуса на окръжността в допирната точка.

През външна за дадена окръжност точка съществуват две допирателни прави към окръжността. Допирателните отсечки от тази точка до окръжността са равни.

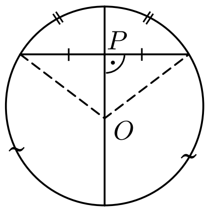


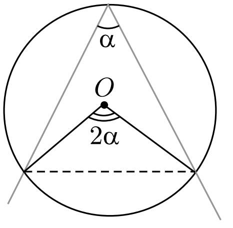
Две дъги от една окръжност са равни точно тогава, когато съответните им хорди са равни.

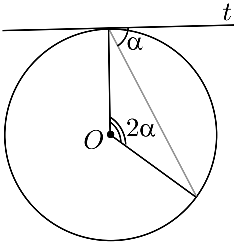
Две хорди в една окръжност са равни точно тогава, когато са на равни разстояния от центъра на окръжността.

Диаметърът на окръжност е перпендикулярен на хорда от същата окръжност, която не е диаметър, тогава и само тогава, когато той:

• разполовява хордата;
• разполовява дъгите, чиито краища са краищата на хордата.







Централният ъгъл е равен на съответната му дъга.

Вписаният и периферният ъгъл са равни на:

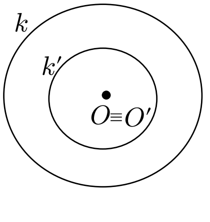
• половината от съответния им централен ъгъл;
• половината от мярката на съответната им дъга.

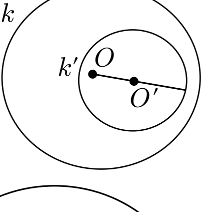
Ъгъл, чийто връх е вътрешна точка за окръжност, е равен на полусбора на градусните мерки на съответните му дъги.

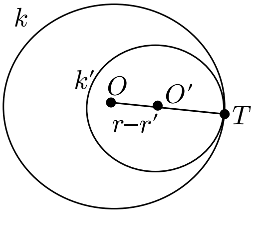
Ъгъл, чийто връх е външна точка за окръжност, а рамената му имат общи точки с окръжността, е равен на полуразликата на градусните мерки на съответните му дъги.

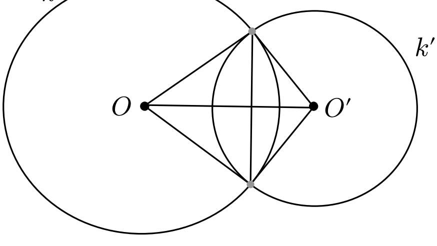
За окръжностите $k(O; r)$ и $k'(O'; r')$ с централа $OO' = d$ имаме:

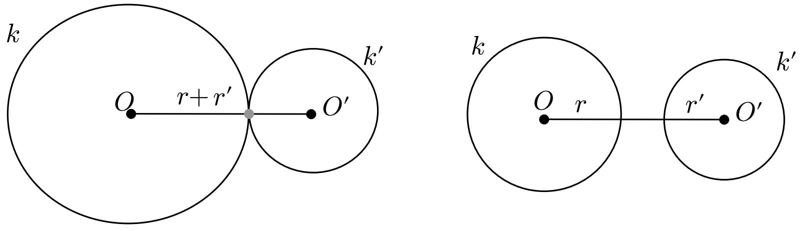
$d < r - r'$	k' е вътрешна за k
$d = r - r'$	k и k' са вътрешнодопирателни
$r - r' < d < r + r'$	k и k' се пресичат
$d = r + r'$	k и k' са външнодопирателни
$d > r + r'$	k и k' са външни една за друга





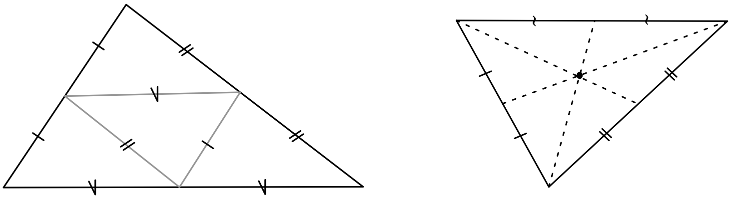






Триъгълник

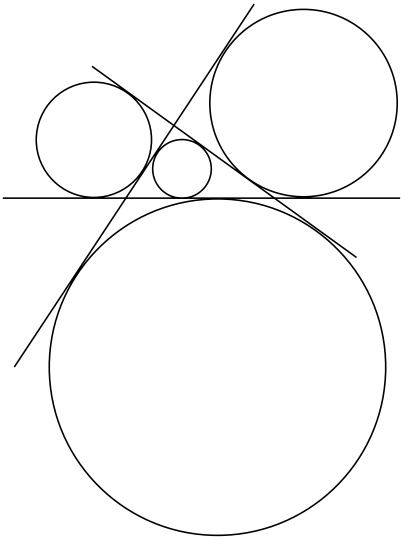
Всеки триъгълник има три средни отсечки. Всяка средна отсечка свързва средите на две от страните на триъгълника, успоредна е на третата му страна и е равна на половината от нея.



Трите медиани на всеки триъгълник се пресичат в медицентъра му, който ги дели в отношение 2 : 1, считано от върха.

Около всеки триъгълник може да се опише единствена окръжност. Центърът ѝ е пресечната точка на симетралите на страните му.

Във всеки триъгълник има точно една вписана окръжност. Центърът ѝ е пресечната точка на трите ъглополовящи на триъгълника.



За всеки триъгълник съществуват точно три външновписани окръжности. Центърът на всяка от тях е пресечната точка на ъглополовящата на един вътрешен ъгъл на триъгълника и ъглополовящите на външните ъгли при другите два върха на триъгълника.

Правите, върху които лежат височините на триъгълник, се пресичат в ортоцентъра му.

Четириъгълник

Средната отсечка на всеки трапец свързва средите на бедрата му, успоредна е на основите му и дължината ѝ е равна на полусбора им.

Трапецът е равнобедрен тогава и само тогава, когато:

• ъглите при всяка от основите му са равни;

• диагоналите му са равни;

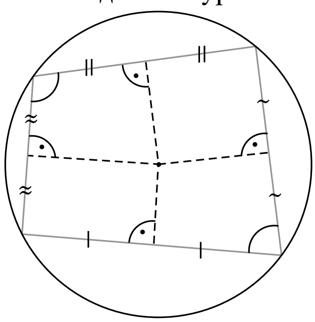
• диагоналите му сключват равни ъгли с основите.

Четириъгълник е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато:

• сборът на коя да е негова двойка срещуположни ъгли е 180°;

• симетралите на страните му се пресичат в една точка;

• някоя от страните му се вижда под един и същ ъгъл от два върха на четириъгълника, които лежат в една полуравнина относно тази страна.

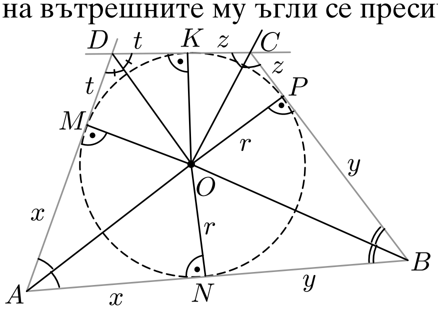


Успоредник е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато е правоъгълник.

Трапец е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато е равнобедрен.

Четириъгълник е описан около окръжност тогава и само тогава, когато:

• ъглополовящите на вътрешните му ъгли се пресичат в една точка;



• сборът на две негови срещуположни страни е равен на сбора на другите две страни.

Задачи

1. Дадено е, че в четириъгълника $ABCD$ средите на диагоналите AC и BD са съответно точките M и N. Докажете, че $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$.

2. В равнобедрения $\triangle ABC$ точката E е среда на основата AB, $M \in AC$ и $N \in BC$ така, че $EM \| BC$ и $EN \| AC$. Определете вида на четириъгълника $ENCM$ и намерете периметъра му, ако $AC = 8$ cm.

3. Дадено е, че правата AB се допира до окръжността $k(O, r = 6$ cm) в точка B, а $AB = 8$ cm. Намерете периметъра на $\triangle AOB$.

4. В окръжност $k(O)$ са дадени хордите AB и CD.

а) Намерете мярката на $\sphericalangle BDC$, ако $\sphericalangle ACD = 15^\circ$ и $AB \perp CD$.

б) Намерете мярката на $\sphericalangle AOD$, ако $\sphericalangle ACD = 95^\circ$.

в) Намерете мярката на $\sphericalangle ACD$, ако AB е диаметър и $\sphericalangle BCD = 20^\circ$.

5. Диагоналите на трапеца $ABCD$ са ъглополовящи на ъглите при голямата му основа AB. Докажете, че:

а) трапецът $ABCD$ е равнобедрен;

б) $\triangle ABO$, където $O = AC \cap BD$ е равнобедрен.

6. Страните на $\triangle ABC$ са съответно 5 cm, 6 cm и 7 cm. Намерете в какви отношения са разделени тези страни от допирните им точки с вписаната в триъгълника окръжност.

7. За мерките на ъглите на четириъгълника $ABCD$ е изпълнена пропорцията $\sphericalangle BCA : \sphericalangle DBC = \sphericalangle BDA : \sphericalangle DAC$. Докажете, че $ABCD$ е вписан в окръжност.