Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

10. клас

РЕГАЛИЯ 6

СЪДЪРЖАНИЕ

Тема 3. Статистика и обработка на данни

Тема 4. Решаване на триъгълник

ТЕМА

НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР

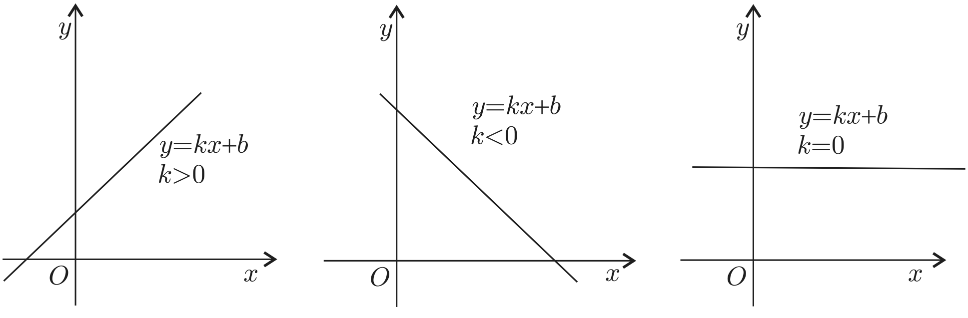
НАЧАЛЕН ПРЕГОВОР. АЛГЕБРА

Функции

Функцията е основно понятие в математиката. Казваме, че е зададена функция $y = f(x)$ с дефиниционно множество D и множество от функционални стойности E, ако на всеки елемент $x_0 \in D$ е съпоставен точно един елемент y_0 от E. Елементът $x_0 \in D$ наричаме аргумент, а съответният елемент y_0 от E – функционална стойност в x_0. Множествата D и E обикновено са съставени от числа и затова такива функции са числови.

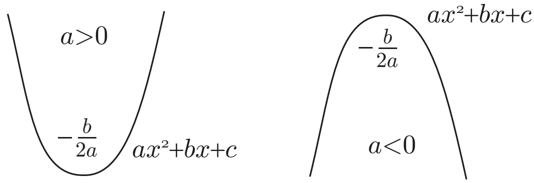
Ако $y = f(x)$ е една функция, за която множеството D е числово (то може да съвпада с множеството на реалните числа, да е определен интервал или друг вид множество от числа), то множеството от точки $(x, f(x))$ наричаме графика на функцията $f(x)$. Ако не е отбелязано нещо специално за D, приемаме, че D съвпада с множеството R на реалните числа. Свойствата на функцията и приближените ѝ стойности може да се определят от вида на нейната графика.

Функция, зададена чрез формулата $y = f(x) = kx + b$, наричаме **линейна функция**. Графиката на тази функция е права линия. В случаите, когато $k > 0$ линейната функция е растяща, при $k < 0$ – намаляваща, а при $k = 0$ е константна (постоянна) величина.



Функция от вида $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, се нарича **квадратна функция**. Графиката на тази функция е парабола. От представянето

$y = ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right)$, където $D = b^2 - 4ac$ е дискриминантата на квадратния тричлен, получаваме, че при $a > 0$ функцията приема най-малка стойност при $x = -\frac{b}{2a}$ и съответно при $a < 0$, функцията приема най-голяма стойност при $x = -\frac{b}{2a}$.



Ако $a > 0$ функцията е намаляваща при $x \leqq -\frac{b}{2a}$ и растяща при $x \geqq -\frac{b}{2a}$ и обратно при $a < 0$, функцията е растяща при $x \leqq -\frac{b}{2a}$ и намаляваща при $x \geqq -\frac{b}{2a}$. Точката с координати $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$ се нарича **връх на параболата.**

Системи уравнения

Ако за няколко уравнения търсим всички възможни стойности на неизвестните в тях, които удовлетворяват всяко от уравненията, казваме, че е зададена **система уравнения**.

Системи от вида $\left|\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right.$, за които поне един от коефициентите във всяко от уравненията е ненулев, наричаме система линейни уравнения с две неизвестни x и y. Такива системи обикновено решаваме чрез заместване или чрез събиране.

Тъй като графиките на всяко от уравненията са прави линии, решенията на системата могат да се илюстрират като пресечни точки на двете графики и тогава говорим за графично решаване на системите.

Ако поне едно от уравненията в една система е от втора степен, то системата е от втора степен. Някои от тези системи се решават чрез заместване и събиране, като се прилагат теоремите за равносилност на системи уравнения.

Пример 1. Да се реши системата уравнения $\left|\begin{array}{l} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 4y^2 + x + 3y - 1 = 0 \end{array}\right.$.

Решение:

От първото уравнение изразяваме $y = 2x - 1$ и заместваме във второто, т.е. $x^2 - 4(2x-1)^2 + x + 3(2x-1) - 1 = 0$, откъдето $15x^2 - 23x + 8 = 0$. Последното уравнение има две решения $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{8}{15}$, откъдето

$y_1 = 2x_1 - 1 = 2.1 - 1 = 1$ и $y_2 = 2x_2 - 1 = 2.\dfrac{8}{15} - 1 = \dfrac{1}{15}$. Окончателно решенията са $(1;1)$ и $\left(\dfrac{8}{15}; \dfrac{1}{15}\right)$.

Към този подход можем да отнесем и решаването на системи, в които едно от уравненията е хомогенно, т.е. от вида $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$.

Пример 2. Да се реши системата $\left|\begin{array}{l} 3x^2 + 8xy + 4y^2 = 0 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 4 \end{array}\right.$.

Решение:

Двойката числа $x = 0$ и $y = 0$ е решение на първото уравнение. Но наредената двойка $(0;0)$ не е решение на системата. Следователно можем да приемем, че $x \neq 0,\ y \neq 0$ и да положим $x = ty$. Получаваме $3t^2 + 8t + 4 = 0$. Решенията на последното уравнение са $t_1 = -2$ и $t_2 = -\dfrac{2}{3}$, т.е. $3t^2 + 8t + 4 = (t+2)(3t+2)$ или окончателно $3x^2 + 8xy + 4y^2 = (x + 2y)(3x + 2y) = 0$. Това ни дава възможност да сведем решаването на системата до решаването на следните две системи

$$\left|\begin{array}{l} x + 2y = 0 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 4 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left|\begin{array}{l} 3x + 2y = 0 \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 4 \end{array}\right. .$$

Всяка от горните системи е от вида, който разгледахме по-рано. Окончателно системата има четири решения $(2;-3)$, $(-2;3)$, $\left(\sqrt{2}; \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Рационални неравенства

Линейни неравенства с едно и също неизвестно, на които се търсят общите решения, образуват система неравенства с едно неизвестно. Решаването на неравенства от вида $|ax + b| < c$, $|ax + b| \leqq c$, $(ax + b)(cx + d) > 0$, $(ax + b)(cx + d) \geqq 0$, $(ax + b)(cx + d) < 0$, $(ax + b)(cx + d) \leqq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leqq 0$, $\dfrac{ax + b}{cx + d} > 0$, $\dfrac{ax + b}{cx + d} \geqq 0$, $\dfrac{ax + b}{cx + d} < 0$ и $\dfrac{ax + b}{cx + d} \leqq 0$ се свеждат до решаване на системи линейни неравенства. За решаване на квадратни неравенства може да се използва и графиката на квадратната функция. За решаване на рационалните неравенства от втора и по-висока степен се използва методът на интервалите.

Задачи

1. Да се построи графиката на функцията:

а) $y = x + 3$; б) $y = 2x - 1$; в) $y = \dfrac{1}{2}x - 1$;

г) $y = 1 - \dfrac{1}{2}x$; д) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$; е) $y = 3 + \left(1 + \sqrt{2}\right)x$.

2. Да се намери стойността на k, ако е известно, че графиката на функцията $y = kx + 6$ минава през точката с координати $(-2; 4)$.

3*. Да се построи графиката на функцията:

а) $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leqq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$; б) $f(x) = \begin{cases} 4, & x \leqq -1 \\ 2x + 2, & x > -1 \end{cases}$;

в) $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x \leqq -1 \\ 4x + 2, & x > -1 \end{cases}$; г) $f(x) = \begin{cases} -3x + 1, & x \leqq -1 \\ x + 2, & -1 < x \leqq 3 \\ 3x - 1, & x > 3 \end{cases}$.

4. Да се построи графиката на функцията

а) $y = x^2 + 1$; б) $y = -x^2 - 1$;

в) $y = 3x^2 + 6x + 1$; г) $y = -2x^2 + 4x + 7$.

5. Да се реши системата линейни уравнения

а) $\left| \begin{array}{l} 3x - 5y = 7 \\ 2x + 3y = -8 \end{array} \right.$; б) $\left| \begin{array}{l} 2x + 7y = 6 \\ 6x + 61y = 10 \end{array} \right.$;

в) $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{4}(3x + 1) - \frac{1}{2}(2x - y) = \frac{1}{8}(4y - 3x) \\ \frac{1}{3}(5x + 1) - \frac{1}{2}(y - 3x) = \frac{1}{5}(x + y) \end{array} \right.$.

6. Да се реши системата уравнения

а) $\left| \begin{array}{l} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{array} \right.$; б) $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{array} \right.$; в) $\left| \begin{array}{l} x^2 + xy = 15 \\ y^2 + xy = 10 \end{array} \right.$; г) $\left| \begin{array}{l} x^2 = 7x + 3y \\ y^2 = 7y + 3x \end{array} \right.$.

7. Да се реши неравенството:

а) $|4x + 3| < 5$; б) $(4x - 3)(5x + 2) < 0$; в) $2x^2 - 4x + 7 \geqq 0$;

г) $\frac{7(1 - 3x)}{4x + 5} \geqq 0$; д) $\frac{5x - 1}{x^2 - 4} \leqq 0$; е) $\frac{x^2 + 7}{49 - 14x + x^2} > 0$;

ж) $\frac{x}{x - 5} > \frac{1}{2}$; з) $\frac{x^2 + 4x - 5}{2x^2 + x - 1} \leqq 0$; и) $\frac{-(x + 2)^4}{x^3(x - 2)^2} \geqq 0$;

к) $\frac{x + 7}{x - 5} + \frac{3x + 1}{2} > 0$; л) $|2 - 5x| > 1$; м) $x \leqq 3 - \frac{1}{x - 1}$.

ТЕМА 1

ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ. ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ

1 ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Понятието ирационален израз

Определение

Алгебричен израз, който съдържа корени (радикали) се нарича **ирационален израз**.

Например изразите $\sqrt{x-1}$, $\sqrt{x}+5$, $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\dfrac{\sqrt{5}}{1-\sqrt{x^2}}$ са ирационални с квадратни корени.

Ирационалните изрази, както и дробните, не са дефинирани винаги за всяка стойност на променливата.

Дефиниционна област на ирационален израз

Квадратен корен съществува само от неотрицателни числа. Това определя **допустимите стойности** на ирационалните изрази с квадратни корени.

Множеството от всички допустими стойности за даден израз образува **дефиниционната област** на този израз.

Задача 1. Да се определи дефиниционната област D на израза:

а) $\sqrt{6x^2+x-1}$; б) $\sqrt{-x^2-5}$; в) $\sqrt{x^2+2x+2}$;

г) $\sqrt{x^4+x^2-30}$; д) $\sqrt{\dfrac{x}{(2x+1)(x-2)}}$; е) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{3x-1}$.

Решение:

а) $\sqrt{6x^2+x-1}$ б) $\sqrt{-x^2-5}$

1 Определяме неравенството (системата неравенства), за които даденият израз е дефиниран:

$D: 6x^2+x-1 \geqq 0$ $D: -x^2-5 \geqq 0$

2 Решаваме полученото неравенство (системата неравенства):

$x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$ $x \in \varnothing$

3 Определяме дефиниционната област на израза:

Изразът е дефиниран за
$x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$

Няма реални числа, които са допустими стойности на израза

в) $\sqrt{x^2+2x+2}$

1 $D: x^2+2x+2 \geqq 0$

2 $x \in (-\infty; +\infty)$

3 Изразът е дефиниран за всяко реално число

г) $\sqrt{x^4+x^2-30}$

$D: x^4+x^2-30 \geqq 0$

$x \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$

Изразът е дефиниран за
$x \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$

д) $\sqrt{\dfrac{x}{(2x+1)(x-2)}}$

1 $D: \dfrac{x}{(2x+1)(x-2)} \geqq 0$

2 $\left| \begin{array}{l} x(2x+1)(x-2) \geqq 0 \\ 2x+1 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{array} \right.$

$x \in \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right] \cup (2; +\infty)$

3 Изразът е дефиниран за всяко
$x \in \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right] \cup (2; +\infty)$

е) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{3x-1}$

$D: \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} \neq 0 \\ x \geqq 0 \\ 3x-1 \geqq 0 \end{array} \right.$

$\left| \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \geqq 0 \\ 3x-1 \geqq 0 \end{array} \right.$

$x \in \left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$

Изразът е дефиниран за всяко
$x \in \left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$

Задача 2. За кои стойности на x е вярно равенството?

а) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$; б) $\sqrt{(x-3)^2} = x-3$;

в) $\sqrt{(x+4)^2} = -4-x$; г) $\sqrt{(5-x)^2} = 5-x$.

Решение:

а) $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$
От $(x-3)^2 \geqq 0$ за всяко x
следва, че $D: x \in (-\infty; +\infty)$.
От свойството $\sqrt{a^2} = |a|$
следва, че равенството
е изпълнено за всяко $x \in D$.

б) $\sqrt{(x-3)^2} = x-3$
От $(x-3)^2 \geqq 0$ за всяко x
следва, че $D: x \in (-\infty; +\infty)$.
$\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = x-3$ при $x \geqq 3$.
Равенството е изпълнено за всяко
$x \in [3; +\infty)$.

в) $\sqrt{(x+4)^2} = -4 - x$
От $(x+4)^2 \geqq 0$ за всяко x,
следва, че $D : x \in (-\infty; +\infty)$;
$\sqrt{(x+4)^2} = |x+4| = -(x+4)$
при $x \leqq -4$.
Равенството е изпълнено за всяко
$x \in (-\infty; -4]$.

г) $\sqrt{(5-x)^2} = 5 - x$
От $(5-x)^2 \geqq 0$ за всяко x,
следва, че $D : x \in (-\infty; +\infty)$;
$\sqrt{(5-x)^2} = |5-x| = 5 - x$ за $x \leqq 5$.
Равенството е изпълнено за всяко
$x \in (-\infty; 5]$.

Числена стойност на ирационален израз

Определение

Ако буквите в даден ирационален израз се заместят с числа от дефиниционната област на израза и се извършат означените действия, полученото число се нарича **числена стойност на израза.**

Задача 3. Да се пресметнат числените стойности на израза:

а) $\sqrt{\dfrac{2}{x^2-4}}$ за $x = 2\sqrt{3}$, $x = -2\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3,5}$;

б) $\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x^2+11x-42}}$ за $x = -\dfrac{53}{3}$, $x = -3$, $x = 3$;

в) $\sqrt{\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y+1}}$ за $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ и $y = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$.

Решение:

а) $\sqrt{\dfrac{2}{x^2-4}}$

$$D : \left| \begin{array}{l} \dfrac{2}{x^2-4} \geqq 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x^2 - 4 \geqq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{array} \right.$$

$D :\ x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$
$2\sqrt{3} \in D \Longrightarrow$ за $x = 2\sqrt{3}$
$$\sqrt{\frac{2}{(2\sqrt{3})^2 - 4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$
$x = -2\sqrt{3} \in D \Longrightarrow$
$$\sqrt{\frac{2}{(-2\sqrt{3})^2 - 4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$
$x = \sqrt{3,5} \notin D \Longrightarrow$
изразът не е дефиниран.

б) $\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x^2+11x-42}}$

$$D : \left| \begin{array}{l} \dfrac{x^2-9}{x^2+11x-42} \geqq 0 \\ x^2 + 11x - 42 \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+14)} \geqq 0 \\ x \neq 3; x \neq -14 \end{array} \right.$$

$D : x \in (-\infty; -14) \cup [-3; 3) \cup (3; +\infty)$
$-\dfrac{53}{3} \in D \Rightarrow$ за $x = -\dfrac{53}{3}$,
$$\sqrt{\frac{-\frac{53}{3} + 3}{-\frac{53}{3} + 14}} = \sqrt{4} = 2$$
$-3 \in D$, за $x = -3$, $\sqrt{\dfrac{-3+3}{-3+14}} = 0$
за $x = 3 \notin D \Longrightarrow$ изразът
не е дефиниран.

в) Да пресметнем $x+1=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+1=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}>0$ и

$$y+1=\frac{1}{2-\sqrt{3}}+1=\frac{3-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}>0.$$

Тогава $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}>0$. Следователно изразът е дефиниран при дадените стойности на x и y и числената му стойност е

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}}=\sqrt{\frac{6}{9-3}}=1.$$

! Обърнете внимание, че числената стойност на ирационален израз не винаги е ирационално число.

Задачи

1. Определете дефиниционната област на израза:

а) $\sqrt{3x-1}$; б) $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$; в) $\sqrt{\dfrac{1}{(x-4)(x+5)}}$; г) $\sqrt{6+x-15x^2}$;

д) $\sqrt{\dfrac{1}{4x^2-4x+1}}$; е) $\sqrt{\dfrac{x-5}{5-x}}$; ж) $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{x+3}$;

з) $\sqrt{36x^4-25x^2+4}$; и) $\sqrt{x^4-5x^2-36}$; к) $\sqrt{(x^2-6x+8)(x^2-1)}$.

2. За кои стойности на x изразът не е дефиниран?

а) $\sqrt{3+x}$; б) $\sqrt{\dfrac{1}{x(x+3)}}$; в) $\sqrt{3x^2-x-2}$; г) $\sqrt{x^4-9x^2+20}$.

3. Пресметнете числената стойност на израза:

а) $x+\sqrt{x^2}$ за $x=-5$; б) $\sqrt{\dfrac{1}{4x^2-1}}$ за $x=\dfrac{1}{2}$;

в) $\sqrt{\dfrac{x^2-25}{3x^2-11x-20}}$ за $x=5$; г) $\sqrt{1+4y+4y^2}$ за $y=-1$;

д) $\sqrt{(x-y)^2}$ за $x=3\dfrac{1}{4}$ и $y=4\dfrac{1}{3}$; е) $\sqrt{1+x^2}$ за $x=\sqrt{6-2\sqrt{6}}$.

4. За кои стойности на x е вярно равенството?

а) $\sqrt{(x+5)^2}=x+5$; б) $\sqrt{(6-x)^2}=x-6$; в) $\sqrt{(3x+1)^2}=|3x+1|$.

2 ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

При тъждествени преобразувания на ирационални изрази са в сила правилата за преобразуване на рационални изрази и свойствата на квадратните корени.

Ако A, B, C и D са рационални изрази, то в множеството от съответните им допустими стойности са верни равенствата:

$\dfrac{A}{B} = \dfrac{A.C}{B.C}, B \neq 0, C \neq 0;$ $\left(\dfrac{A}{B}\right)^n = \dfrac{A^n}{B^n}, B \neq 0, n \in N;$

$\dfrac{A}{B} \pm \dfrac{C}{B} = \dfrac{A \pm C}{B}, B \neq 0;$ $\sqrt{A^2} = |A|;$

$\dfrac{A}{B}.\dfrac{C}{D} = \dfrac{A.C}{B.D}, B \neq 0, D \neq 0;$ $\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B}, A \geqq 0, B \geqq 0;$

$\dfrac{A}{B} : \dfrac{C}{D} = \dfrac{A.D}{B.C}, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0;$ $\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}, A \geqq 0, B > 0.$

Задача 1. Да се изнесат всички възможни множители извън квадратния корен:

а) $\sqrt{\dfrac{1}{25a^3b^2}}$; б) $\sqrt{-18x^2y + 9x^4 + 9y^2}$.

Решение:

а) $\sqrt{\dfrac{1}{25a^3b^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{5^2a^2.ab^2}}$

$= \dfrac{1}{5|a||b|}\sqrt{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{5a|b|}\sqrt{\dfrac{1}{a}},$

защото $D:\ a > 0, b \neq 0;$

б) $\sqrt{-18x^2y + 9x^4 + 9y^2}$

$= \sqrt{3^2(x^2 - y)^2} = 3|x^2 - y|,$

защото D : всяко x и y.

Задача 2. Да се внесе множителят пред корена под знака на квадратния корен:

а) $\dfrac{1}{a}\sqrt{a^4.b}$; б*) $(x+2)\sqrt{\dfrac{2}{7x^2 + 12x - 4}}$.

Решение:

а) $\dfrac{1}{a}\sqrt{a^4.b}, D : \left|\begin{array}{l} a \neq 0 \\ b \geqq 0 \end{array}\right.$.

I случай: При $a > 0$ получаваме $\dfrac{1}{a}\sqrt{a^4b} = \sqrt{\dfrac{a^4b}{a^2}} = \sqrt{a^2b}$.

II случай: При $a < 0$ получаваме $\dfrac{1}{-(-a)}\sqrt{a^4b} = -\sqrt{\dfrac{a^4b}{(-a)^2}} = -\sqrt{a^2b}$.

б*) $(x+2)\sqrt{\dfrac{2}{7x^2+12x-4}}$, $D: (7x-2)(x+2)>0, x \in (-\infty;-2)\cup\left(\dfrac{2}{7};+\infty\right)$.

I случай: При $x \in \left(\dfrac{2}{7};+\infty\right)$ изразът $x+2>0$. Следователно

$$(x+2)\sqrt{\frac{2}{7x^2+12x-4}}=\sqrt{\frac{2(x+2)^2}{(7x-2)(x+2)}}=\sqrt{\frac{2(x+2)}{7x-2}}.$$

II случай: При $x \in (-\infty;-2)$ изразът $x+2<0$. Следователно

$$-(-x-2)\sqrt{\frac{2}{7x^2+2x-4}}=-\sqrt{\frac{2(-x-2)^2}{(7x-2)(x+2)}}=-\sqrt{\frac{2(x+2)}{7x-2}}.$$

!

Под знака на квадратния корен се внася само положителен множител.

Задача 3. Да се извършат означените действия:

а) $a^2\sqrt{25a}-\dfrac{1}{a}\sqrt{a^5}+a\sqrt{a}$;

б) $\dfrac{3}{4}\sqrt{2\dfrac{1}{2}a}.\sqrt{\dfrac{0,4}{a}}$;

в) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}+1}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}+1}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$;

г) $(\sqrt{x}+2\sqrt{a})^2$;

д) $\sqrt{\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}}:\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}, x>y>0$;

е) $(x\sqrt{x}-1-\sqrt{2})(x\sqrt{x}-1+\sqrt{2})$.

Решение:

а) $a^2\sqrt{25a}-\dfrac{1}{a}\sqrt{a^5}+a\sqrt{a}$

$=a^2\sqrt{5^2a}-\dfrac{1}{a}\sqrt{(a^2)^2a}+a\sqrt{a}$

$=5a^2\sqrt{a}$, $D:\ a>0$;

в) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}+1}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}+1}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$

$=\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}+1}\right)^2-\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2$

$=\dfrac{a}{b}+1-\dfrac{a}{b}=1$, $D:\ \dfrac{a}{b}\geqq 0; b\neq 0$;

д) $\sqrt{\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}}:\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$

$=\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2y^2}:\dfrac{x-y}{x+y}}$

$=\sqrt{\dfrac{(x-y)(x+y)}{x^2y^2}.\dfrac{x+y}{x-y}}$

$=\left|\dfrac{x+y}{xy}\right|=\dfrac{x+y}{xy}$;

б) $\dfrac{3}{4}\sqrt{2\dfrac{1}{2}a}.\sqrt{\dfrac{0,4}{a}}$

$=\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{5}{2}.a.\dfrac{0,4}{a}}=\dfrac{3}{4}$,

$D:\ a>0$;

г) $(\sqrt{x}+2\sqrt{a})^2$

$=(\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}.2\sqrt{a}+(2\sqrt{a})^2$

$=x+4\sqrt{ax}+4a$,

$D:\ x\geqq 0$ и $a\geqq 0$;

е) $(x\sqrt{x}-1-\sqrt{2})(x\sqrt{x}-1+\sqrt{2})$

$=(x\sqrt{x}-1)^2-(\sqrt{2})^2$

$=x^3-2x\sqrt{x}+1-2$

$=x^3-2x\sqrt{x}-1$,

$D: x\geqq 0$.

Задачи

1. Извършете действията:

а) $c\sqrt{c}-4\sqrt{c^3}+c^2\sqrt{\dfrac{1}{c}}, c>0$; б) $\left(\sqrt{mn}+\sqrt{\dfrac{m}{n}}\right):\sqrt{\dfrac{m}{n}}, m>0$ и $n>0$;

в) $\dfrac{5x}{6}\sqrt{2,88x^3y^2z^3}, x>0, y>0$ и $z>0$; г) $\left(3\sqrt{x}-\dfrac{1}{3}\sqrt{y}\right)^2$;

д) $\left(\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}\right):\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; е) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{1+2\sqrt{x}+x}:\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$ при $x>0$;

ж) $\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$ при $a>0$ и $a\neq 1$;

з) $\sqrt{\dfrac{a+x^2}{x}-2\sqrt{a}}+\sqrt{\dfrac{x^2+a}{x}+2\sqrt{a}}$ при $a\geqq 0, x>0$ и $x>\sqrt{a}$.

2. Намерете числената стойност на израза:

а) $\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$ за $a=2$ и $b=\dfrac{1}{2}$;

б) $\sqrt{\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{b-1}}$ за $a=3+\sqrt{2}$ и $b=3-\sqrt{2}$.

3 ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ ЧРЕЗ РАЦИОНАЛИЗИРАНЕ

Дробните изрази, които имат радикали в знаменателя, могат да се преобразуват в дроби със знаменател рационален израз. Този вид преобразуване се нарича **рационализиране на знаменателя на дадена дроб.**

За да рационализираме знаменателя на една дроб, разширяваме дробта с подходящо избран израз, различен от нула, като за целта се използват формулите

$\sqrt{a}\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2=a, a>0$ или

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b, a>0$ и $b>0$.

Задача 1. Да се рационализира знаменателят на:

а) $\dfrac{a}{b\sqrt{a}}$; б) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; в) $\dfrac{1-16x^2}{1+2\sqrt{x}}$; г) $\dfrac{y-1}{\sqrt{y-1}-\sqrt{y+2}}$.

Решение:

а) $\dfrac{a}{b\sqrt{a}}=\dfrac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{a}.\sqrt{a}}=\dfrac{a\sqrt{a}}{b(\sqrt{a})^2}=\dfrac{a\sqrt{a}}{b.a}=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$ при $a>0$ и $b\neq 0$;

б) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$
при $x\geqq 0, y\geqq 0$ и $x\neq y$;

в) $1-2\sqrt{x}\neq 0 \iff x\neq \frac{1}{4}$, $\frac{1-16x^2}{1+2\sqrt{x}}=\frac{(1-16x^2)(1-2\sqrt{x})}{(1+2\sqrt{x})(1-2\sqrt{x})}$
$=\frac{(1-4x)(1+4x)(1-2\sqrt{x})}{1-4x}=(1+4x)(1-2\sqrt{x})$ при $x\geqq 0$;

г) $\frac{y+2}{\sqrt{y-1}-\sqrt{2y+1}}=\frac{(y+2)(\sqrt{y-1}+\sqrt{2y+1})}{(\sqrt{y-1}-\sqrt{2y+1})(\sqrt{y-1}+\sqrt{2y+1})}$
$=\frac{(y+2)(\sqrt{y-1}+\sqrt{2y+1})}{y-1-2y-1}=\frac{(y+2)(\sqrt{y-1}+\sqrt{2y+1})}{-(y+2)}$
$=-\sqrt{y-1}-\sqrt{2y+1}$ при $y\geqq 1$.

Понякога се налага да се рационализира числителят на дадена дроб. Това се извършва по начини, аналогични на рационализирането на знаменателя.

Например, за да сравним $\frac{\sqrt{6}}{3}$ и $\frac{\sqrt{10}}{5}$, рационализираме числителите им и получаваме дроби с равни числители $\frac{2}{\sqrt{6}}$ и $\frac{2}{\sqrt{10}}$. Тогава от $\sqrt{6}<\sqrt{10}$ следва, че $\frac{2}{\sqrt{6}}>\frac{2}{\sqrt{10}}$.

Задача 2. Да се рационализира числителят на:

а) $\frac{3\sqrt{a}}{5ab}$; б) $\frac{\sqrt{x+2}}{2x+4}$; в) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x^2-xy}$; г) $\frac{3\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}}{5x^2+x-4}$.

Решение:

а) $\frac{3\sqrt{a}}{5ab}=\frac{3\sqrt{a}\sqrt{a}}{5ab\sqrt{a}}=\frac{3a}{5ab\sqrt{a}}=\frac{3}{5b\sqrt{a}}$ при $a>0$ и $b\neq 0$;

б) $\frac{\sqrt{x+2}}{2x+4}=\frac{\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}}{2(x+2)\sqrt{x+2}}=\frac{x+2}{2(x+2)\sqrt{x+2}}=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ при $x>-2$;

в) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x^2-xy}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{x-y}{x(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{1}{x(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$
при $x>0, y\geqq 0$ и $x\neq y$;

г) $$\begin{aligned}\frac{3\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}}{5x^2+x-4}&=\frac{(3\sqrt{x}-2\sqrt{x+1})(3\sqrt{x}+2\sqrt{x+1})}{(5x^2+x-4)(3\sqrt{x}+2\sqrt{x+1})}\\&=\frac{9x-4x-4}{(5x-4)(x+1)(3\sqrt{x}+2\sqrt{x+1})}\\&=\frac{5x-4}{(5x-4)(x+1)(3\sqrt{x}+2\sqrt{x+1})}\\&=\frac{1}{(x+1)(3\sqrt{x}+2\sqrt{x+1})}\end{aligned}$$

при $x\in\left[0;\frac{4}{5}\right)\cup\left(\frac{4}{5};+\infty\right)$.

Задача 3*. Да се рационализира знаменателят на $\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+1}$.

Решение:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+1} &= \frac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}-1)} = \frac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})^2-1}\\ &= \frac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}-1)}{x+1+2\sqrt{(x+1)x}+x-1} = \frac{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}-1)}{2(x+\sqrt{(x+1)x})}\\ &= \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{(x+1)x})}{x^2-(\sqrt{(x+1)x})^2}\\ &= \frac{x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2+x}}{x} \text{ при } x>0.\end{aligned}$$

Задачи

1. Рационализирайте знаменателя на израза за допустимите стойности на променливите:

а) $\dfrac{a-1}{1-\sqrt{a}}$; б) $\dfrac{x^2+4x+4}{\sqrt{x+2}}$; в) $\dfrac{6-2x}{\sqrt{3}+\sqrt{x}}$;

г) $\dfrac{a}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$; д) $\dfrac{6b(a+0,5)}{\sqrt{a+2}+\sqrt{1-a}}$; е) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$;

ж) $\dfrac{4(a-b)^2}{a+b-2\sqrt{ab}}$; з) $\dfrac{a+2}{\sqrt{a-1}-\sqrt{2a+1}}$; и*) $\dfrac{2}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}$.

2. Рационализирайте числителя на дробта:

а) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{b}$; б) $\dfrac{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{a}$; в) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; г) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

4 ПРЕОБРАЗУВАНЕ НА ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ. УПРАЖНЕНИЕ

Задача 1. Да се съкрати дробта:

а) $\dfrac{6x-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$; б) $\dfrac{3-m}{\sqrt{m}+\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{2+\sqrt{a}+2\sqrt{b}+\sqrt{ab}}{(a-4)(b-1)}$; г) $\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{x-1}$.

Решение:

I начин:

а) $\dfrac{6x-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{(\sqrt{6})^2x-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}$

$= \dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{6}.x-1)}{2\sqrt{6}}$

$= \dfrac{\sqrt{6}x-1}{2}$, D : за всяко x;

б) $\dfrac{3-m}{\sqrt{m}+\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{m})^2}{\sqrt{m}+\sqrt{3}}$

$= \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{m})(\sqrt{3}-\sqrt{m})}{\sqrt{m}+\sqrt{3}}$

$= \sqrt{3}-\sqrt{m}$,

$D:\ m \geqq 0$.

II начин: Дробта може да се съкрати и чрез рационализиране на знаменателя.

$$\frac{6x-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}=\frac{(6x-\sqrt{6})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\sqrt{6}}$$
$$=\frac{6\sqrt{6}x-6}{2.6}$$
$$=\frac{\sqrt{6}x-1}{2},\ D: \text{за всяко } x;$$

$$\frac{3-m}{\sqrt{m}+\sqrt{3}}=\frac{(3-m)(\sqrt{m}-\sqrt{3})}{(\sqrt{m}+\sqrt{3})(\sqrt{m}-\sqrt{3})}$$
$$=\frac{-(m-3)(\sqrt{m}-\sqrt{3})}{m-3}$$
$$=\sqrt{3}-\sqrt{m},$$
$D:\ m\geqq 0, m\neq 3;$

в) $$\frac{2+\sqrt{a}+2\sqrt{b}+\sqrt{ab}}{(a-4)(b-1)}$$
$$=\frac{(2+\sqrt{a})(1+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2)(\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)}$$
$$=\frac{1}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{b}-1)},$$
$D: a\geqq 0$ и $a\neq 4, b\geqq 0$ и $b\neq 1$.

г) $$\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}=\frac{(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x})^2-1}$$
$$=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1},$$
$$D:\ \left|\begin{array}{l} x\geqq 0\\ x\neq 1\end{array}\right. .$$

Задача 2. Да се докаже, че стойността на дадения ирационален израз не зависи от стойностите на x

$$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{8\sqrt{x}}{x-1}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Решение:

$$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{8\sqrt{x}}{x-1}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
$$=\frac{(\sqrt{x}+1)^2-(\sqrt{x}-1)^2-8\sqrt{x}}{x-1}.\frac{x-1}{\sqrt{x}}=\frac{x+2\sqrt{x}+1-x+2\sqrt{x}-1-8\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-4,$$
при $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Задача 3. Да се докаже тъждеството:

а) $\sqrt{\dfrac{x^2+y}{x}+2\sqrt{y}}+\sqrt{\dfrac{y+x^2}{x}-2\sqrt{y}}=2\sqrt{\dfrac{y}{x}}$ при $\sqrt{y}>x>0$;

б*) $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ при $a\geqq 0, b\geqq 0$ и $a^2\geqq b$.

Решение:

а) $$\sqrt{\frac{x^2+y}{x}+2\sqrt{y}}+\sqrt{\frac{y+x^2}{x}-2\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x^2+y+2x\sqrt{y}}{x}}+\sqrt{\frac{y+x^2-2x\sqrt{y}}{x}}$$
$$=\frac{\sqrt{(x+\sqrt{y})^2}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{(\sqrt{y}-x)^2}}{\sqrt{x}}=\frac{|x+\sqrt{y}|+|\sqrt{y}-x|}{\sqrt{x}}=\frac{x+\sqrt{y}+\sqrt{y}-x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{\frac{y}{x}},$$
защото $\sqrt{y}-x>0$;

б*) Повдигаме на квадрат двете страни на равенството при условията $a \geqq 0, b \geqq 0$ и $a^2 \geqq b$. Тъй като $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \geqq \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, то преобразуванията са еквивалентни.

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2 = (\sqrt{a \pm \sqrt{b}})^2$$

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} \pm 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} = a \pm \sqrt{b}$$

$a \pm 2\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)}{4}} = a \pm \sqrt{b}$. Следователно $a \pm \sqrt{b} = a \pm \sqrt{b}$.

!

Тъждеството $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ е известно като **формула** за преобразуване на **сложен радикал**. Използва се за опростяване на изрази от вида $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ при $a > 0, b > 0$ и $a^2 > b$.

Задача 4. Да се опрости израза $\sqrt{5+\sqrt{21}}$.

Решение:

Прилагаме формулата за сложен радикал при $a = 5$ и $b = 21$.

$$\begin{aligned}\sqrt{5+\sqrt{21}} &= \sqrt{\frac{5+\sqrt{25-21}}{2}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{25-21}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}.\end{aligned}$$

Задачи

1. Съкратете дробта:

а) $\frac{2a-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{2\sqrt{x}-4x}{2\sqrt{x}}$; в) $\frac{x-5}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$; г) $\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$;

д) $\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{ab}+a}$; е) $\frac{y-2}{y+2\sqrt{2y}+2}$; ж) $\frac{3+\sqrt{3a}}{a+\sqrt{3a}}$; з) $\frac{x^3+1}{x+\sqrt{x-1}}$.

2. Докажете тъждеството:

а) $\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} - \frac{a^2+1}{1-a^2} = \frac{a}{a+1}$; б) $x^2 - \sqrt{x^4+2x^2+1} = -1$.

3. Докажете, че стойностите на ирационалните изрази не зависят от стойностите на a и b:

а) $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3 + 2a^2 : \sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}-3b}{a-b}$;

б) $\frac{1}{6b}\left((a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + a - b\right)\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - 1\right)$, при $a > b > 0$.

4*. Опростете израза:

а) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt{23+\sqrt{129}}+\sqrt{23-\sqrt{129}}$;

в) $\sqrt{17+x+8\sqrt{x+1}}$ при $x \geqq -1$.

5 ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ЕДИН КВАДРАТЕН РАДИКАЛ

Задача 1. Намислих число, умножих го по 10 и от полученото произведение извадих 1. Новото число коренувах и получих 13. Кое е намисленото число?

Решение:

I начин: Ще решим задачата, като извършим обратните действия на описаните в задачата. Започваме от числото 13 и последователно получаваме $13^2=169$, $13^2+1=170$ и $(13^2+1):10=17$.

Следователно търсеното число е 17.

II начин: Да означим търсеното число с x. По описаните в условието на задачата действия получаваме уравнението $\sqrt{10x-1}=13$. Това уравнение се различава от разглежданите до сега, в часовете по математика, уравнения по това, че неизвестното x е под знака на радикала.

Определение

Уравнение, в което неизвестното участва в действието коренуване, се нарича **ирационално уравнение**.

Изложеният I начин на решение на зад. 1 подсказва, че ирационалните уравнения могат да се решават чрез повдигане на квадрат на двете страни на уравнението. Тогава от $\sqrt{10x-1}=13$ получаваме $(\sqrt{10x-1})^2=13^2$ или $10x-1=169$, откъдето $x=17$.

Числото 17 е корен на ирационалното уравнение $\sqrt{10x-1}=13$, което установяваме чрез проверката $\sqrt{10.17-1}=13$. Следователно намисленото число е 17.

Определение

Числото p е **корен** на дадено ирационално уравнение, ако всички изрази в уравнението са дефинирани при $x=p$ и при заместване на x с p в уравнението се получава вярно числово равенство.

Ирационалното уравнение решаваме като го преобразуваме до рационално уравнение чрез повдигане на квадрат на двете му страни. Полученото рационално уравнение е **следствие** на даденото, защото то може да има и корени, които не са корени на ирационалното уравнение, наречени **чужди корени**. Това налага да се направи проверка в даденото уравнение с корените на рационалното уравнение.

! Две уравнения са **еквивалентни** в общото им дефиниционно множество, когато всяко от тях е следствие на другото.

Задача 2. Да се реши уравнението:

а) $3x + \sqrt{12x - 11} = 4$; б) $\sqrt{2x^2 + 31} = x + 6$.

Решение:

а) $3x + \sqrt{12x - 11} = 4$; б) $\sqrt{2x^2 + 31} = x + 6$.

1 Повдигаме на квадрат двете страни на уравнението и преобразуваме до рационално уравнение:

а)	б)
$(\sqrt{12x - 11})^2 = (4 - 3x)^2$	$(\sqrt{2x^2 + 31})^2 = (x + 6)^2$
$12x - 11 = 16 - 24x + 9x^2$	$2x^2 + 31 = x^2 + 12x + 36$
$x^2 - 4x + 3 = 0$	$x^2 - 12x - 5 = 0$

2 Решаваме рационалното уравнение:

а)	б)
$a = 1, b = -4, c = 3$	$a = 1, b = -12, c = -5$
$x_1 = 1$ и $x_2 = 3$	$x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{41}$

3 Проверяваме дали намерените корени са корени и на даденото уравнение:

а)

за $x_1 = 1 \Rightarrow 3.1 + \sqrt{12.1 - 11} = 4$

$3 + 1 = 4$

за $x_2 = 3 \Rightarrow 3.3 + \sqrt{12.3 - 11} = 4$

$9 + 5 \neq 4$

Следователно $x_1 = 1$ е корен, $x_2 = 3$ е чужд корен.

б)

за $x = 6 \pm \sqrt{41} \Rightarrow$

$\sqrt{2(6 \pm \sqrt{41})^2 + 31} = 6 \pm \sqrt{41} + 6.$

$\sqrt{185 \pm 24\sqrt{41}} = \sqrt{(12 \pm \sqrt{41})^2}$

$= |12 \pm \sqrt{41}| = 12 \pm \sqrt{41},$

където $12 + \sqrt{41} > 0$ и $12 - \sqrt{41} > 0$.

Следователно $x = 6 \pm \sqrt{41}$ са корени.

Да разгледаме втори начин за проверка дали корените на рационалното уравнение са корени и на ирационалното уравнение.

Решаването на ирационални уравнения по този начин се основава на следната теорема:

Теорема

Уравнението $\sqrt{F(x)} = G(x)$ (1) е равносилно (еквивалентно) на системата $\left|\begin{array}{l} F(x) = (G(x))^2 \\ G(x) \geqq 0 \end{array}\right.$ (2).

*

Доказателство: I. Нека p е корен на (1), т.е. всички изрази, участващи в (1) са дефинирани при $x = p$ (в частност $F(p) \geqq 0$) и

$$\sqrt{F(p)} = G(p) \quad (3).$$

Ако две числа са равни, то и квадратите им са равни. Следователно

$$F(p) = (G(p))^2 \quad (4).$$

Стойността на един квадратен корен (когато той е дефиниран) е неотрицателно число. Следователно $\sqrt{F(p)} \geqq 0$. Тогава от (3) получаваме, че и

$$G(p) \geqq 0 \quad (5).$$

От (4) и (5) следва, че p е решение на системата (2).

II. Нека p е решение на (2), т.е.

$$\left| \begin{array}{l} F(p) = (G(p))^2 \\ G(p) \geqq 0 \end{array} \right. \qquad (6).$$

От (6) следва, че $F(p) \geqq 0$. Тогава числото p е от дефиниционната област на уравнение (1). Остава да докажем, че $\sqrt{F(p)} = G(p)$.

От $F(p) = (G(p))^2$ получаваме

$$(G(p))^2 - F(p) = 0$$
$$(G(p) + \sqrt{F(p)})(G(p) - \sqrt{F(p)}) = 0 \quad (7).$$

От $G(p) \geqq 0$ и $\sqrt{F(p)} \geqq 0$ следва, че $G(p) + \sqrt{F(p)} \geqq 0$.

Ще разгледаме два случая:

I случай: $G(p) + \sqrt{F(p)} > 0$.

Тогава от (7) получаваме

$$G(p) - \sqrt{F(p)} = 0, \ \text{ т.е.} \sqrt{F(p)} = G(p).$$

II случай: $G(p) + \sqrt{F(p)} = 0$.

Това е възможно само ако $G(p) = 0$ и $\sqrt{F(p)} = 0$, откъдето отново следва, че $\sqrt{F(p)} = G(p)$.

*

Да приложим теоремата за решаване на уравненията от задача 2.

а) $\sqrt{12x - 11} = 4 - 3x$; б) $\sqrt{2x^2 + 31} = x + 6$.

1 Записваме системата, равносилна на даденото уравнение:

$$\left| \begin{array}{l} 12x - 11 = (4 - 3x)^2 \\ 4 - 3x \geqq 0 \iff x \leqq \dfrac{4}{3} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} 2x^2 + 31 = (x + 6)^2 \\ x + 6 \geqq 0 \iff x \geqq -6 \end{array} \right.$$

2 Решаваме уравнението от системата:

$12x - 11 = (4 - 3x)^2$
$x^2 - 4x + 3 = 0$
$x_1 = 1$ и $x_2 = 3$

$2x^2 + 31 = (x + 6)^2$
$x^2 - 12x - 5 = 0$
$x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{41}$

3 Проверяваме кои от намерените корени удовлетворяват неравенството от системата:

за $x_1 = 1$ е изпълнено $1 < \frac{4}{3} \Rightarrow$
$x = 1$ е корен

за $x_2 = 3$ е изпълнено $3 > \frac{4}{3} \Rightarrow$
$x_2 = 3$ не е корен
Следователно $x_1 = 1$
е корен на ирационалното уравнение.

за $x = 6 \pm \sqrt{41}$ е изпълнено
$6 \pm \sqrt{41} > -6$.

Следователно $x_{1,2} = 6 \pm \sqrt{41}$
са корени на ирационалното уравнение.

Задача 3. Да се реши уравнението $(4x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 5x} = 0$.

Решение:

$$(4x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 5x} = 0 \iff \left| \begin{array}{l} 4x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 5x \geqq 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \sqrt{x^2 - 5x} = 0,$$

$$\iff \left| \begin{array}{ll} x_{1,2} = \pm\frac{1}{2} & x^2 - 5x = 0 \\ x \in (-\infty; 0] \cup [5; +\infty) & x_3 = 0 \text{ или } x_4 = 5 \end{array} \right.$$

$x_1 = -\frac{1}{2} \in (-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$, а $x_2 = \frac{1}{2} \notin (-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$.

Следователно $x_1 = 0$, $x_4 = 5$ и $x_3 = -\frac{1}{2}$ са корени на даденото уравнение.

Задачи

Решете уравнението:

1. $\sqrt{6x^2 - x} = 1$;

2. $\sqrt{x(x-1)(x-2) + 9} = 3$;

3. $\sqrt{5x^4 + x^2 - 2} = \sqrt{2}$;

4. $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4$;

5. $\sqrt{x^3 - 2x^2 + 4x + 1} = 3x - 1$;

6. $\sqrt{\frac{2x - 3}{x - 1}} = \frac{2}{3}$;

7. $\sqrt{x^2 - 9} + 4 = 3 + x$;

8. $\sqrt{4 - 6x - x^2} = x + 4$;

9. $3x - 10\sqrt{x + 1} + 6 = 0$;

10. $(x^2 - 1)\sqrt{1 - 2x^2} = 0$;

11. $\frac{x^3 - 4x^2 - 4x + 16}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}} = 0$;

12. $\frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{x^4 - 13x^2 + 36} = 0$;

13. $(x - 5)(x - 6)\sqrt{5 - x} = 0$;

14. $|x + 2|\sqrt{x - 2} = 0$.

6 ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ С ДВА КВАДРАТНИ РАДИКАЛА

Ирационални уравнения с два радикала се решават чрез свеждане до уравнения с един радикал.

Задача 1. Да се реши уравнението:

а) $\sqrt{3x-5}+\sqrt{19-5x}=4$; б) $\sqrt{15-2x}-\sqrt{2x-3}=2\sqrt{3}$.

Решение:

а) $\sqrt{3x-5}+\sqrt{19-5x}=4$;

$\sqrt{3x-5}=4-\sqrt{19-5x}$

1 Повдигаме на квадрат двете страни на уравнението и преобразуваме до рационално уравнение:

$(\sqrt{3x-5})^2=(4-\sqrt{19-5x})^2$

$3x-5=16-8\sqrt{19-5x}+19-5x$

$\sqrt{19-5x}=5-x$

$(\sqrt{19-5x})^2=(5-x)^2$

$x^2-5x+6=0$

2 Решаваме рационалното уравнение:

$x_1=2$ и $x_2=3$

3 Проверяваме дали намерените корени са корени и на даденото уравнение:

за $x=2$, $\sqrt{3.2-5}+\sqrt{19-5.2}=4$

$1+3=4$

за $x=3$, $\sqrt{3.3-5}+\sqrt{19-5.3}=4$

$2+2=4$

Числата 2 и 3 са корени на уравнението.

б) $\sqrt{15-2x}-\sqrt{2x-3}=2\sqrt{3}$.

1 $(\sqrt{15-2x}-\sqrt{2x-3})^2=(2\sqrt{3})^2$

$15-2x-2\sqrt{(15-2x)(2x-3)}+2x-3=12$

$\sqrt{(15-2x)(2x-3)}=0$

$(15-2x)(2x-3)=0$

2 $x_1=7,5$ и $x_2=1,5$

3 за $x=7,5$

$\sqrt{15-2.7,5}-\sqrt{2.7,5-3}=2\sqrt{3}$

$-\sqrt{12}\neq 2\sqrt{3}$

за $x=1,5$

$\sqrt{15-2.1,5}-\sqrt{2.1,5-3}=2\sqrt{3}$

$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

Числото 1,5 е корен на уравнението, а числото 7,5 не е корен.

Задача 2. Да се определи броят на корените на уравнението:

а) $\sqrt{x^2-2+\sqrt{x^2+9}}=3$; б) $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{2}$.

Решение:

а) $\sqrt{x^2-2+\sqrt{x^2+9}}=3$ б) $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{2}$

$$\frac{x+\sqrt{x^2-x}-x+\sqrt{x^2-x}}{x^2-x^2+x}=\sqrt{2}$$

$2\sqrt{x^2-x}=\sqrt{2}x,$

$D: x\in(-\infty;0)\cup[1;+\infty)$

1 $\left(\sqrt{x^2-2+\sqrt{x^2+9}}\right)^2=3^2$

$\sqrt{x^2+9}=11-x^2$

$(\sqrt{x^2+9})^2=(11-x^2)^2$

$x^4-23x^2+112=0$

2 $x_{1,2}=\pm 4$ и $x_{3,4}=\pm\sqrt{7}$

3 за $x_{1,2}=\pm 4$, $\sqrt{16-2+\sqrt{16+9}}=3$

$\sqrt{19}\neq 3$

Следователно $x_{1,2}=\pm 4$ не са корени на уравнението.

за $x_{3,4}=\pm\sqrt{7}$, $\sqrt{7-2+\sqrt{7+9}}=3$

$\sqrt{9}=3$

Следователно $x_{3,4}=\pm\sqrt{7}$ са корени на уравнението.

Уравнението има два корена.

$\left(2\sqrt{x^2-x}\right)^2=(\sqrt{2}x)^2$

$4(x^2-x)=2x^2$

$2x^2-4x=0$

$x^2-2x=0$

$x_1=0$ и $x_2=2$

$x=0\notin D$

Следователно $x=0$ не е корен на уравнението.

за $x=2$

$2\sqrt{2^2-2}=\sqrt{2}.2$

$2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

Следователно $x=2$ е корен на уравнението.

Уравнението има един корен.

! Проверката може да се направи и в междинно уравнение, което е еквивалентно на даденото уравнение.

Задачи

Решете уравнението:

1. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6;$

2. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2;$

3. $\sqrt{10-x^2}+\sqrt{x^2+3}=5;$

4. $\sqrt{3x+13}-\sqrt{2x+7}=1;$

5. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-6}+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-6}-x^2}=\dfrac{1}{2};$

6. $\dfrac{1}{\sqrt{3-4x^4}+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{3-4x^4}-x^2}=1;$

7. $x+2=\sqrt{4+x\sqrt{36+x^2}};$

8. $1+x=\sqrt{1+x\sqrt{x^2+12}};$

9. $1-\dfrac{1}{x}=\sqrt{1-\dfrac{1}{x}\sqrt{4-\dfrac{7}{x^2}}};$

10. $\dfrac{2}{x}+2=\sqrt{4+\dfrac{1}{x}\sqrt{64+\dfrac{144}{x^2}}};$

11. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-3}=10;$

12. $\sqrt{12+x}=\sqrt{7x+8}-2;$

13. $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-9}=-1;$

14. $2-\sqrt{5x}+\sqrt{2x-1}=0.$

7 ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ, КОИТО СЕ РЕШАВАТ ЧРЕЗ ПОЛАГАНЕ

Има ирационални уравнения, които се решават по-лесно с полагане, отколкото с повдигане на квадрат на лявата и дясната страна на уравнението.

Задача 1. Да се реши уравнението:

а) $x^2 - 35 = 2\sqrt{x^2 - 32}$;

б) $\sqrt{(5x+3)^3} - \dfrac{16}{\sqrt{(5x+3)^3}} = 6$;

в) $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}} - \sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}} = \dfrac{7}{12}$;

г) $\sqrt{3x^2+5x-8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$.

Решение:

а) $x^2 - 35 = 2\sqrt{x^2 - 32}$
$x^2 - 32 - 3 = 2\sqrt{x^2 - 32}$

б) $\sqrt{(5x+3)^3} - \dfrac{16}{\sqrt{(5x+3)^3}} = 6$

0 Подходящ израз от даденото уравнение полагаме на u и получаваме уравнение с ново неизвестно:

$\sqrt{x^2 - 32} = u, u \geqq 0$
$u^2 - 3 = 2u$

$\sqrt{(5x+3)^3} = u, u > 0$
$u - \dfrac{16}{u} = 6$

1 Новото уравнение привеждаме до познато рационално уравнение:

$u^2 - 2u - 3 = 0$

$u^2 - 6u - 16 = 0$

2 Решаваме рационалното уравнение:

$u_1 = 3$ и $u_2 = -1 < 0$
Следователно u_2 не е решение.

$u_1 = 8$ и $u_2 = -2 < 0$
Следователно u_2 не е решение.

3 Заместваме стойностите на u в полагането и решаваме получените уравнения:

$\sqrt{x^2 - 32} = 3$
$x^2 - 32 = 9$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{41}$

$\sqrt{(5x+3)^3} = 8$
$(5x+3)^3 = 64 = 4^3$
$5x + 3 = 4 \Rightarrow x = 0,2$

4 Проверяваме дали намерените корени са корени на даденото уравнение:

за $x_{1,2} = \pm\sqrt{41}$, $\sqrt{41 - 32} = 3$
$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{41}$ са корени.

за $x = 0,2$, $\sqrt{(5.0,2+3)^3} = \sqrt{64} = 8$
$\Rightarrow x = 0,2$ е корен.

в) $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}} - \sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}} = \dfrac{7}{12}$;

0 $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}} = u,\ u > 0$

$u - \dfrac{1}{u} = \dfrac{7}{12}$

1 $12u^2 - 7u - 12 = 0$

2 $u_1 = -\dfrac{3}{4} < 0, \quad u_2 = \dfrac{4}{3}$.
Следователно u_1 не е решение.

3 $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}} = \dfrac{4}{3}, x = 7$.

4 за $x = 7$, $\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}$
$\Rightarrow x = 7$ е корен.

г) $\sqrt{3x^2 + 5x - 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$.

$3x^2 + 5x = u$
$\sqrt{u-8} - \sqrt{u+1} = 1$

$\left(\sqrt{u-8}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{u+1}\right)^2$
$\sqrt{u+1} = -5 < 0$

Уравнението няма решение.

Следователно и даденото уравнение няма решение.

Задачи

Решете дадените уравнения.

1. $x^2 - x + 9 + \sqrt{x^2 - x + 9} = 12$.

2. $x^2 - 4x = 3\sqrt{x^2 - 4x + 20} - 10$.

3. $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$.

4. $x + 42 - 11\sqrt{x^2 - x - 42} = x^2$.

5. $9\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-1}} - \dfrac{x^2-4}{x^2-1} = 20$.

6. $\sqrt{\dfrac{2x}{1+2x}} + \sqrt{\dfrac{1+2x}{2x}} = \dfrac{5}{2}$.

7. $\sqrt{\dfrac{x+9}{4-x}} + \sqrt{\dfrac{4-x}{x+9}} = \dfrac{13}{6}$.

8. $\sqrt{\dfrac{x+5}{x}} + 4\sqrt{\dfrac{x}{x+5}} = 4$.

9. $\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7$.

10. $\sqrt{1 - x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 1$.

8 ИРАЦИОНАЛНИ УРАВНЕНИЯ. УПРАЖНЕНИЕ

За решаването на някои ирационални уравнения е достатъчно да определим множеството от допустимите стойности D. Ако D се състои само от едно число, то чрез проверка се установява дали това число е корен на уравнението.

Задача 1. Да се реши уравнението:

а) $\sqrt{3-2x}+\sqrt{2x-3}=0$; б) $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x^2}=x^3-x$.

Решение:

а) $\sqrt{3-2x}+\sqrt{2x-3}=0$

Определяме D : $\left|\begin{array}{l} 3-2x\geqq 0 \\ 2x-3\geqq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\leqq \dfrac{3}{2} \\ x\geqq \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Числото $\dfrac{3}{2}$ е единствената допустима стойност и с проверка доказваме, че е корен на даденото уравнение.

б) $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x^2}=x^3-x$

Определяме D : $\left|\begin{array}{l} x-1\geqq 0 \\ 1-x^2\geqq 0 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} x-1\geqq 0 \\ (1-x)(1+x)\geqq 0 \end{array}\right. \iff x=1$.

Чрез проверка установяваме, че $x=1$ е корен на даденото уравнение.

Задача 2. Да се докаже, че уравнението няма решение:

а) $\sqrt{x-1}=3-2\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+5}=0$;

в) $3\sqrt{x-1}-5\sqrt{1-x}+\dfrac{6}{x-1}=10$; г*) $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+9}=\sqrt{x-2}$.

Решение:

а) $\sqrt{x-1}=3-2\sqrt{3}$

За всяко $x\in D : x\geqq 1$ следва, че $\sqrt{x-1}\geqq 0$, а числото $3-2\sqrt{3}<0$.

Следователно даденото уравнение няма решение.

б) $\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+5}=0$

Определяме D : $\left|\begin{array}{l} 5x+1\geqq 0 \\ x+5\geqq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\geqq -\dfrac{1}{5}$.

Тогава $\sqrt{5x+1}\geqq 0$ и $\sqrt{x+5}>0$.

Следователно $\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+5}>0$ и уравнението няма решение.

в) $3\sqrt{x-1}-5\sqrt{1-x}+\dfrac{6}{x-1}=10$

Определяме D : $\left|\begin{array}{l} x-1\geqq 0 \\ 1-x\geqq 0 \\ x-1\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\varnothing$

Следователно няма стойности на x, за които уравнението има смисъл.

г*) $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+9}=\sqrt{x-2}$

Определяме D : $\left|\begin{array}{l} x-3\geqq 0 \\ x+9\geqq 0 \\ x-2\geqq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\geqq 3$

Тогава от $0\leqq x-3<x+9$, при $x\geqq 3$, получаваме $\sqrt{x-3}<\sqrt{x+9}$. Лявата страна на уравнението е отрицателна, а дясната – положителна.

Следователно уравнението няма решение.

Задача 3. Да се реши уравнението:

а) $(x+3)\sqrt{x^2-x-12}=2\sqrt{2}x+6\sqrt{2}$;

б*) $(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}-28=0$;

в*) $2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x-10}=0$;

г*) $\sqrt{9-x}-\sqrt{5-5x}=\sqrt{8+5x}-\sqrt{4+x}$.

Решение:

а) $(x+3)\sqrt{x^2-x-12}=2\sqrt{2}x+6\sqrt{2} \Leftrightarrow (x+3)\sqrt{x^2-x-12}=2\sqrt{2}(x+3)$ $\Leftrightarrow (x+3)(\sqrt{x^2-x-12}-2\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow x+3=0$ или $\sqrt{x^2-x-12}-2\sqrt{2}=0$, откъдето получаваме $x_1=-3$, $x_2=-4$ и $x_3=5$. Чрез проверка установяваме, че числата -3, -4 и 5 са корени на даденото уравнение.

б*) $(x-3)(x+1)+3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}-28=0$;

Определяме $D: \dfrac{x+1}{x-3}\geqq 0 \iff x\in(-\infty;-1]\cup(3;+\infty)$.

При внасяне на множителя $(x-3)$ под радикала:

– при $x\in(3;+\infty)$, получаваме $3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=3\sqrt{(x+1)(x-3)}$ или

– при $x\in(-\infty;-1]$, получаваме $3(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=-3\sqrt{(x+1)(x-3)}$.

Даденото уравнение е еквивалентно на следните две системи:

$$\left|\begin{array}{l} x>3 \\ (x-3)(x+1)+3\sqrt{(x-3)(x+1)}-28=0 \end{array}\right.$$

или

$$\left|\begin{array}{l} x\leqq -1 \\ (x-3)(x+1)-3\sqrt{(x+1)(x-3)}-28=0 \end{array}\right. .$$

Полагаме $t=\sqrt{(x-3)(x+1)}\geqq 0$ и получаваме:

$t^2+3t-28=0$ или $t^2-3t-28=0$

$t_1=-7$ и $t_2=4$ $\quad$ $t_3=7$ и $t_4=-4$

От изискването $t=\sqrt{(x-3)(x+1)}\geqq 0$, отпадат $t_1=-7$ и $t_4=-4$.

Възможни стойности за t са $t_2=4$ и $t_3=7$, откъдето

$$\left|\begin{array}{l} x>3 \\ \sqrt{(x-3)(x+1)}=4 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left|\begin{array}{l} x\leqq -1 \\ \sqrt{(x-3)(x+1)}=7 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x\leqq -1 \\ (x-3)(x+1)=16 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left|\begin{array}{l} x\leqq -1 \\ (x-3)(x+1)=49 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x>3 \\ x^2-2x-19=0 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left|\begin{array}{l} x\leqq -1 \\ x^2-2x-52=0 \end{array}\right.$$

$x_1=1+2\sqrt{5}>3$ $\quad$ $x_3=1+\sqrt{53}>-1$

$x_2=1-2\sqrt{5}<3$ $\quad$ x_3 не е решение

x_2 не е решение. $\quad$ $x_4=1-\sqrt{53}<-1$.

Корени на даденото ирационално уравнение са $1+2\sqrt{5}$ и $1-\sqrt{53}$.

в*) $2\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x-10}=0$

$2\sqrt{x-1}=\sqrt{x+2}+\sqrt{5x-10} \Longrightarrow (2\sqrt{x-1})^2=(\sqrt{x+2}+\sqrt{5(x-2)})^2 \Longrightarrow$

$4x-4=x+2+2\sqrt{5(x^2-4)}+5x-10 \iff 2-x=\sqrt{5(x^2-4)} \Longrightarrow$

$(2-x)^2=(\sqrt{5(x^2-4)})^2 \iff x^2+x-6=0$, откъдето $x_1=2$ и $x_2=-3$.

Проверка: За $x=2$, $2\sqrt{2-1}-\sqrt{2+2}-\sqrt{5.2-10}=0$.

За $x=-3$, изразът $2\sqrt{-3-1}$ не е дефиниран.

Следователно само числото 2 е корен на даденото уравнение.

г*) $\sqrt{9-x}-\sqrt{5-5x}=\sqrt{8+5x}-\sqrt{4+x} \iff$
$\sqrt{4+x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{8+5x}+\sqrt{5-5x} \Longrightarrow$

$(\sqrt{4+x}+\sqrt{9-x})^2=(\sqrt{8+5x}+\sqrt{5-5x})^2 \iff$
$\sqrt{(4+x)(9-x)}=\sqrt{(8+5x)(5-5x)} \Longrightarrow$

$(\sqrt{(4+x)(9-x)})^2=(\sqrt{(8+5x)(5-5x)})^2 \iff 6x^2+5x-1=0$, откъдето $x_1=\dfrac{1}{6}$ и $x_2=-1$.

Проверка:

За $x=\dfrac{1}{6}$, $\sqrt{9-\dfrac{1}{6}}-\sqrt{5-\dfrac{5}{6}}=\sqrt{8+\dfrac{5}{6}}-\sqrt{4+\dfrac{1}{6}} \iff \dfrac{\sqrt{53}}{\sqrt{6}}-\dfrac{5}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{53}}{\sqrt{6}}-\dfrac{5}{\sqrt{6}}$.

За $x=-1$, $\sqrt{9+1}-\sqrt{5+5}=\sqrt{8-5}-\sqrt{4-1} \iff \sqrt{10}-\sqrt{10}=\sqrt{3}-\sqrt{3}$.

Следователно числата $\dfrac{1}{6}$ и -1 са корени на даденото уравнение.

Задачи

1. Решете уравнението:

а) $\sqrt{3x^2+1}=3-\sqrt{10}$; б) $x\sqrt{36x+1261}=18x^2-17x$;

в) $\sqrt{5-6x}-\sqrt{12x-10}=0$; г) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{1-4x^2}=8x^3+1$;

д) $(x+2)\sqrt{x^2-x-12}=2\sqrt{2}x+4\sqrt{2}$; е) $(x+3)\sqrt{x^2-17x+25}=3x+9$.

2. Докажете, че уравнението няма решение:

а) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=2$; б) $\sqrt{10+\sqrt{x-5}}=3$; в) $\sqrt{x-5}+\sqrt{2-x}=7$;

г) $5\sqrt{x}-3\sqrt{-x}+\dfrac{17}{x}=4$; д) $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=2$; е) $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-6}=2$.

3*. Решете уравнението:

а) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$; б) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+8}=\sqrt{2x+6}$;

в) $\sqrt{8+x}-\sqrt{4+5x}=\sqrt{9-5x}-\sqrt{5-x}$;

г) $\sqrt{4-x}-\sqrt{5+5x}=\sqrt{8-5x}-\sqrt{9+x}$.

ЗАДАЧИ КЪМ ТЕМА 1

1. Определете допустимите стойности на изразите:

а) $\sqrt{3-6x}$; б) $\sqrt{(x-4)(1-2x)}$; в) $\sqrt{(x-2)(2x+1)}$;

г) $\sqrt{-2(1+x)^2}$; д) $\sqrt{\dfrac{2}{-4x^2+5x-1}}$; е) $77x-\sqrt{x^2-4x-77}$;

ж) $\dfrac{1}{2x+5}-\sqrt{4-x}$.

2. Дадено е уравнението $x^2+2x+c=0$ с корени x_1 и x_2. Определете дефиниционната област на изразите:

а) $\sqrt{x_1x_2}$; б) $\sqrt{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}}$; в) $\sqrt{x_1^2+x_2^2}$.

3. Решете уравнението $3x^2-2x-7=0$. Ако x_1 и x_2 са корените му и $x_1>x_2$, пресметнете:

а) $2x_1+x_2$; б) x_1-x_2; в) $x_1^2-x_2^2$; г) $\dfrac{x_1}{x_2}$.

4. Докажете тъждеството:

а) $1-\sqrt{x^2-2x+1}=x$, $x\leqq 1$;

б) $\sqrt{2b^2+12ab+18a^2}-\sqrt{2b^2}=3a\sqrt{2}$, $a\geqq 0$ и $b\geqq 0$;

в) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right):\left(\dfrac{3}{\sqrt{1-a^2}}+1\right)=\sqrt{1-a}$, при $-1<a<1$;

г) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2.\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)=\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}$, при $a>0$ и $a\neq 1$;

д) $\left(\dfrac{1}{m-\sqrt{mn}}+\dfrac{1}{m+\sqrt{mn}}\right).\dfrac{m^3-n^3}{m^2+mn+n^2}=2$, при $mn>0$ и $m\neq n$.

5. Решете уравнението:

а) $\sqrt{4x-3}=2$; б) $3+\sqrt{1-x}=0$;

в) $(x^2+x-6)\sqrt{x-1}=0$; г) $\sqrt{x-5}+2x=1$;

д) $\dfrac{x}{x+1}-2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}=3$; е) $\sqrt{x+6}-\sqrt{\dfrac{3x+11}{5}}=1$;

ж) $x^2+11-3\sqrt{x^2+11}=4$; з) $\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1$;

и) $\sqrt{3x+3}+2\sqrt{2x-3}=5$; к) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=1$;

л) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x+4}=1$; м) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$;

н) $\sqrt{3x-2}=2\sqrt{x+2}-2$; о) $\sqrt{1+x\sqrt{24+x^2}}=x+1$;

п) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$; р) $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}$;

с) $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}-\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{1}{x}$; т) $\dfrac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\dfrac{1-\sqrt{x}}{2}$.

6. Решете уравнението:

а) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12$; б) $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2(x-3)$;

в) $\dfrac{2x-8}{\sqrt{6-x}}+\sqrt{6-x}=3\sqrt{x-4}$; г) $\dfrac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+7}=\dfrac{7}{\sqrt{x+1}}$;

д*) $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+3}=\sqrt{4x-23}$; е*) $\sqrt{5-\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}}=1$;

ж*) $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}-\sqrt{x-2}$.

з*) $\sqrt{8-x}-\sqrt{9+5x}-\sqrt{4-5x}+\sqrt{5+x}=0$;

Контролен тест 1

На задачи от 1. до 7. включително отбележете верния отговор.

1. Кое от числата не е от дефиниционната област на израза $\sqrt{-x^2+7x-10}$?

А) 2 Б) -2 В) 3 Г) $2\frac{1}{3}$

2. Допустими стойности за x в израза $\dfrac{2}{\sqrt{3x^2-x-4}}$ са числата от интервала:

А) $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$ Б) $\left(-1;\frac{4}{3}\right)$

В) $(-\infty;-1]\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$ Г) $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$

3. За кои стойности на x е вярно равенството $\sqrt{(1-2x)^2}=1-2x$?

А) за всяко x Б) за $x\leqq\frac{1}{2}$ В) за $x\geqq\frac{1}{2}$ Г) за $x\geqq 0$

4. Числената стойност на израза $\sqrt{9x^2-6x+1}-x$ за $x=-100$ е:

А) 201 Б) -201 В) -401 Г) 401

5. Всичките възможни множители, които могат да се изнесат пред радикала $\sqrt{27a^5b^2}$, са:

А) $3a|b|$ Б) $9a^2|b|$ В) $3a^2b$ Г) $3a^2|b|$

6. Изразът $-y\sqrt{\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{2x}{y}+1}$, $y>0$ е тъждествено равен на:

А) $-\sqrt{\dfrac{x^2}{y}+2x+y}$ Б) $|x+y|$

В) $-|x+y|$ Г) $\sqrt{x^2+2xy+y^2}$

7. Кое от равенствата не е тъждество при $x \geqq 0$?

А) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)^2 = x+5-2\sqrt{5x}$ Б) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \sqrt{x}-\sqrt{2}$

В) $(1-3\sqrt{x})(3\sqrt{x}+1) = 1-9x$ Г) $(2\sqrt{x}+1)^2 = 2x+1+4\sqrt{x}$

На задачи 8. и 9. запишете правилния отговор.

8. Опростете израза $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-4y}{(x-y):\left(\sqrt{\dfrac{1}{y}}+3\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right)} : \dfrac{x+9y+6\sqrt{xy}}{\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$.

9. Определете допустимите стойности на израза $\dfrac{(\sqrt{x})^3+\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+1} \cdot \dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$ и го опростете.

На задача 10. напишете подробно решение.

10. Докажете тъждеството $\dfrac{2\sqrt{xy}}{x-y}+\sqrt{1+\dfrac{4xy}{(x-y)^2}} = \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ при $x > y > 0$ и $x \neq y$.

Контролен тест 2

На задачи от 1. до 7. включително отбележете верния отговор.

1. Кое от дадените уравнения не е ирационално?

А) $\sqrt{2-x^2} = -1$ Б) $x\sqrt{2} = 2$

В) $\sqrt{x^2}+x = 0$ Г) $x^2-\sqrt{5x} = 3$

2. Дадено е уравнението $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2} = 7$. Равносилно на него е уравнението:

А) $\sqrt{3x-2} = 7-\sqrt{x+3}$ Б) $7\sqrt{x+3} = 27-x$

В) $x^2-103x+582 = 0$ Г) $(\sqrt{x+3})^2 = (7-\sqrt{3x-2})^2$

3. Дадено е уравнението $x^2+1+\sqrt{x^2+1} = 2$. Следствие, което не е еквивалентно на него, е уравнението:

А) $z^2+z-2 = 0$, където $z = \sqrt{x^2+1}$ Б) $\sqrt{x^2+1} = 1-x^2$

В) $x^2(x^2-3) = 0$ Г) $x^2+\sqrt{x^2+1} = 1$

4. Числото $-1,6$ е корен на уравнението:

А) $\sqrt{25x^2-10x+1} = -9$ Б) $\dfrac{9}{\sqrt{25x^2-10x+1}} = -1$

В) $9+\sqrt{(5x-1)^2} = 0$ Г) $\sqrt{25x^2-10x+1} = 9$

5. Корени на уравнението $1+x = \sqrt{1+x\sqrt{x^2+12}}$ са числата:

А) ± 2 Б) 0 и -2 В) 0 и 2 Г) 0 и ± 2

6. Корени на уравнението $\dfrac{2-x}{2-\sqrt{x}}=\sqrt{\dfrac{2-x}{2}}$ са числата:

А) 0 и $\dfrac{16}{9}$ Б) $0,\ 2$ и $\dfrac{16}{9}$ В) 0 и 2 Г) $0, -2$ и $\dfrac{16}{9}$

7. Допустими стойности на уравнението $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$ са числата от интервала:

А) $(-\infty; 22]$ Б) $(-\infty; 10]$ В) $[10; 22]$ Г) $[10; +\infty)$

На задачи 8. и 9. запишете правилния отговор.

8. Кои от дадените уравнения нямат корени?

1. $\sqrt{-2-11x}+3\sqrt{x}=6$;
2. $\sqrt{100-x^2}+x^2-7x=\dfrac{x^2-10x}{\sqrt{x-10}}$;
3. $\sqrt{4x+7}+\sqrt{3-4x+x^2}+2=0$.

9. Определете корените на уравнението $\sqrt{3+2x-x^2}\sqrt{x-10}\sqrt{-9-x}=0$.

На задача 10. напишете подробно решение.

10. Докажете тъждеството $\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+4\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}=4$.